Les axiomes de Zermelo-Fraenkel.

Aut-eur.rice inconnu.e du rédacteur retraité qui n'est pas juge

Introduction.

Dans cet article dont le contenu est emprunté à un.e logicien.ne inconnu.e nous allons essayer de décrire brièvement le cadre de la théorie axiomatique de Zermelo-Fraenkel, (ZF).

Le cadre de la théorie.

Nous avons tous une notion intuitive d'ensembles comme ≪collection d'objets≫. De même nous avons une notion intuitive de ce que signifie appartenir à un ensemble, mais pour faire des mathématiques nous avons besoin que ces ensembles aient des propriétés qui correspondent à notre intuition : par exemple nous voudrions pouvoir former l'union d'un ensemble d'ensembles. Nous pourrions nous contenter de nous autoriser ces manipulations intuitives (après tout nous ≪percevons bien≫ ce que signifie que d'appartenir à la réunion d'un ensemble d'ensembles). Mais le problème est que ce qui semble ≪intuitif≫ ne l'est pas forcément. Par exemple, pourquoi ne pourrions nous former l'ensemble de tous les ensembles? Cela amène à des paradoxes bien connus, ainsi le paradoxe des catalogues :

- dans chaque bibliothèque il y a un livre spécial : le catalogue de tous les livres de la bibliothèque.
- Il y a alors deux espèces de catalogues : les catalogues qui se citent comme livre de la bibliothèque et ceux qui ne se citent pas comme livre de la bibliothèque.
- Le conservateur de la Bibliothèque Nationale, laquelle contient tous les livres édités en France, souhaite faire éditer pour le conserver, le catalogue de tous les catalogues de bibliothèque qui ne se citent pas. Ce catalogue doit-il se citer comme livre de la Bibliothèque Nationale?

et a provoqué la naissance de *l'approche axiomatique de la théorie des ensembles.* Nous voudrions spécifier les axiomes que doivent vérifier les ensembles ≪mathématiques≫ (par opposition aux ensembles intuitifs), et déduire à partir de notre liste d'axiomes les propriétés des ensembles qui nous permettent de mener des raisonnements mathématiques.
Bien sûr, il faut se donner un point de départ : pour nous c'est un *univers*, c'est à dire un ensemble intuitif $\mathcal{U}$ non vide, les éléments de cet ensemble intuitif sont

les ensembles mathématiques, et nous voudrions pouvoir spécifier les propriétés de ces objets.
Dans la suite on utilisera le terme ≪collection≫ pour désigner un ensemble intuitif et le terme ensembles sera réservé aux ensembles mathématiques, c'est à dire aux éléments de la collection $\mathcal{U}$. On a aussi besoin d'une relation binaire $\in$ définie sur $\mathcal{U}$, dont nous voudrions qu'elle corresponde à l'idée que l'on se fait de la relation d'appartenance. Par exemple on voudrait que si x, y sont deux ensembles ayant les mêmes éléments alors $x = y$. Mais quels énoncés peut-on écrire dans le langage de la théorie des ensembles? Et bien simplement ceux que l'on peut écrire avec les quantificateur $\forall$ (pour tout) et $\exists$ (il existe), les conjonctions (et) les disjonctions (ou inclusif), ainsi que les opérations de restriction et substitution appliquées en partant des relations $=$ et $\in$. Pour un logicien, il s'agit des formules du premier ordre dans le langage *clos* a deux éléments $=$ et $\in$. L'expression formules du premier ordre dans le langage *clos* à deux éléments $=$ et $\in$ signifiant phrase logique finie sans variable libre utilisant les quantificateurs $\forall$, $\exists$, les disjonctions et conjonctions, et les relations $=$ et $\in$. Une variable libre est une lettre ou une suite de lettres qui n'est pas précédée par un quantificateur. Pour simplifier le langage on a aussi recours aux relations logiques $\Rightarrow$ et $\Longleftrightarrow$ où $A \Rightarrow B$ signifie non A ou B a (toujours) la valeur vraie et $A \Longleftrightarrow B$ signifie $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ (a la valeur vraie). Donnons quelques exemples :

- Ceci est un énoncé a trois variables libres :

$$\forall t(t \in z) \Leftrightarrow (t = x \text{ } ou \text{ } t = y)$$

  Formellement, ≪on voit≫ que cet énoncé a *stricto sensu* le même sens que

$$\forall a(a \in d) \Leftrightarrow (a = b \text{ } ou \text{ } a = c)$$

  ceci est l'objet de l'un des axiomes de la théorie (ZF) des ensembles.

- R étant une relation, ceci est un énoncé clos à deux variables

$$\forall x, \forall y, \exists z, R(x, y, z)$$

Certaines relations sont particulièrement importantes, ce sont les *relations fonctionnelles.* Voici ce qu'est une *relation fonctionnelle* à un argument. Supposons que $R(x, y)$ soit une relation à deux variables libres alors on dit que c'est une *relation fonctionnelle* à un argument si et seulement si

$$\forall x \forall y \forall z(R(x, y) = R(x, z) \Rightarrow y = z)$$

On définit de même les relations fonctionnelles à n arguments.
Un axiome de (ZF) est un énoncé clos et un modèle de (ZF) est un univers $\mathcal{U}$ où chaque axiome de (ZF) est vérifié. Venons en maintenant à l'énoncé des axiomes de (ZF).

Axiome d'extentionnalité.

Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments.

Axiome de la réunion.

Dans le langage usuel, cet axiome dit que si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'en sembles (i.e I est un ensemble et chaque X_i aussi) alors on peut former un nouvel ensemble dont les éléments sont exactement ceux qui appartiennent à un X_i. On a déjà dit que pour un théoricien des ensembles tout objet mathématique est un ensemble, ainsi cet axiome doit dire que pour tout ensemble a il existe un ensemble b dont les éléments sont exactement les éléments des éléments de a.

Shéma d'axiomes de remplacement.

Il s'agit en fait d'une infinité d'axiomes. Le schéma d'axiomes de remplacement nous permet, à partir d'une relation fonctionnelle et d'un ensemble, de former un nouvel ensemble. Par exemple il nous permet de former l'image d'un ensemble par une fonction (en tant qu'ensemble, et pas seulement comme une *collection*). Formellement, ce schéma dit que si $E(x, y, a_1, \ldots, a_k)$ est un énoncé à paramètres $a_1, \ldots, a_k$ qui définit une relation fonctionnelle à une variable, et a est un ensemble, alors on peut considérer l'ensemble b dont les éléments sont les images par la relation fonctionnelle E des éléments de a appartenant au domaine de notre relation fonctionnelle. Alors le schéma d'axiome de remplacement consiste en la liste, paramétrée par tous les énoncés $E(x, y, x_1, ..., x_k)$ sans paramètres et à au moins deux variables libres des énoncés suivants :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k (\forall y, \forall y' (E(x, y, x_1, \ldots, x_k) \ et \ E(x, y', x_1, \ldots, x_k)) \Rightarrow y = y')$$

$$\Rightarrow \forall t \exists u \forall y (y \in u \Leftrightarrow \exists x (x \in t \ et \ E(x, y, x_1, \ldots, x_k))$$

Il nous manque encore un axiome pour obtenir toute la liste d'axiomes de Zermelo-Fraenkel. Notons déjà que d'autres énoncés (couramment cités comme des axiomes de ZF) découlent des axiomes précédents.

Shéma d'axiomes de compréhension.

Ce schéma découle directement du schéma d'axiomes de remplacement, il dit que tous les éléments d'un ensemble a qui vérifient une relation forment un ensemble. Pour donner une formule, considérons un énoncé $A(x, x_1, \ldots, x_k)$ sans paramètres et à au moins une variable libre x, alors on a

$$\forall x_1, ..., x_k \forall x \exists z (y \in z) \Leftrightarrow (y \in a \ et \ A(x, x_1, \ldots, x_k))$$

Cet énoncé découle du schéma de substitution appliqué à la relation $x = y \ et \ A(x, x_1, ..., x_k)$

Axiome de l'ensemble vide.

Cet axiome dit qu'il existe un ensemble et un seul qui n'a aucun élément. L'unicité est une conséquence directe de l'axiome d'extensionnalité. Pour prouver l'existence d'un tel ensemble, il suffit d'appliquer le schéma de compréhension à un ensemble a de $\mathcal{U}$ et à l'énoncé $x \neq x$: en effet, on obtient qu'il existe un ensemble noté $\emptyset$ tel que $\forall x x \in \emptyset \Leftrightarrow (x \in a \ et \ x \neq x)$. Par conséquent, $\forall x, \ x \notin \emptyset$.

Axiome de la paire.

Cet axiome dit que, étant donnés deux ensembles x, y il existe un ensemble z dont les éléments sont exactement x et y. En formule :

$$\forall x \forall y \exists z \ \forall t (t \in z) \Leftrightarrow (t = x \ ou \ t = y)$$

On veut définir la paire $\{x, y\}$. Notons qu'avec l'axiome de l'ensemble des parties on peut former l'ensemble $\{\emptyset\}$ qui n'a qu'un seul élément $\emptyset$ et de même on peut former l'ensemble des parties qui grâce l'axiome d'extensionnalité, a deux éléments : $\emptyset$ et $\{\emptyset\}$. On vient donc de prouver l'existence de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Soient maintenant deux ensembles x, y quelconques. Définissons une relation fonctionnelle $R(a, b)$ par $(a = \emptyset \ et \ b = x) \ ou \ (a = \{\emptyset\} \ et \ b = y)$. En appliquant le schéma de substitution à cette relation et à l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ on obtient un ensemble qui n'a que x, y comme éléments.

C'est un bon exercice que de voir qu'avec nos axiomes on peut former produit et intersection d'une famille d'ensembles.
Il nous reste encore un axiome à énoncer, avant de lire l'énoncé de cet axiome il faut avoir lu la définition des ordinaux (leur existence ne dépend que des axiomes déjà énoncés).

Axiome de l'infini.

Cet axiome dit simplement : il existe un ordinal non fini. Rappelons qu'un ordinal α est fini si tout ordinal $\beta \leq \alpha$ et différent de $\emptyset$ est un ordinal successeur. Autrement dit, un ordinal fini est un entier naturel. Cet axiome dit simplement il existe un ordinal non fini. Rappelons qu'un ordinal α est fini si tout ordinal $\beta \leq \alpha$ et différent de $\emptyset$ est un ordinal successeur. Autrement dit, un ordinal fini est un entier naturel.
Une façon équivalente d'énoncer cet axiome est : la collection des ordinaux finis est un ensemble-nous le notons ω-, ou encore : il existe un ordinal limite.

Axiome de fondation.

Cet axiome dit que pour tout ensemble non vide x, il existe un ensemble $y \in x$ et tel que $y \subset x = \emptyset$. En particulier l'axiome de fondation interdit l'existence d'ensembles x tels que $x \in x$, ou l'existence de suites $(x_n)_{n \in \omega}$ telles que $x_{n+1} \in x_n$ pour tout n.
Cet axiome, noté AF, n'est pas une conséquence des axiomes de (ZF), il est courant de se placer dans le cadre axiomatique ZF+AF, qui permet par exemple de caractériser les ordinaux de façon plus simple que dans un uni vers ne vérifiant pas AF.
Si on part d'un univers $\mathcal{U}$ satisfaisant les axiomes de ZF, et qu'on définit $V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ ($\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de l'ensemble E) et $V_\alpha = \cup_{\beta < \alpha} V_\beta$ on obtient une collection d'ensembles dont on peut former la réunion (au sens naïf). Notons $\mathcal{V}$ cette réunion, on peut montrer que si $\mathcal{U}$ est un modèle de (ZF) alors $\mathcal{V}$ est un modèle de ZF+AF.
Il serait malhonnète de conclure sans évoquer le problème suivant : existe-il un

univers $\mathcal{U}$ dans lequel nos axiomes sont vérifiés? De façon malheureuse, mais peu surprenante, croire qu'il en existe un est un acte de foi. Le fameux théorème de Gödel affirme en effet qu'il est impossible de démontrer (avec des théorèmes de (ZF)) que (ZF) est consistante, c'est à dire que ses axiomes n'entraînent pas de contradiction. Toute théorie suffisamment complexe pour permettre de développer les mathématiques classiques se trouvant dans le même cas, la solution n'est pas de changer nos axiomes, il nous faut simplement espérer que la théorie n'est pas contradictoire.

Tout cet article a été repris dans le livre dont le titre est théorie des ensembles et l'auteur Jean-Louis Krivine et dont le prix de vente est le même sur tous les points de vente du territoire de la République Française en application de la loi Lang sur le prix unique du livre.