Se représenter un plan expliqué à mon fils

Alain Wazner

Pour Hélène et Léo

De la feuille de l'écolier et du géomètre vers le plan

L' écolier ou le géomètre peuvent utiliser des instruments tels que la règle et le compas pour expérimenter et dessiner des figures sur une feuille de papier. Ainsi il leur est possible de constater qu'étant donné un trait rectiligne et un point, on ne peut faire passer par ce point qu'un seul trait rectiligne qui ne rencontrera pas le premier, et cela même après avoir prolongé les traits d'autant que possible ; que deux traits rectilignes ne se coupent qu'en un seul lieu ou point ; qu'un triangle dont deux sommets sont les extrémités du diamètre d'un cercle et le troisième un point de la circonférence est toujours un triangle rectangle. Cela a amené, au cours de l'histoire, les mathématiciens à formaliser ou définir des notions issues de l'expérimentation des écoliers et des géomètres. Parmi ces notions, celle issue du support (la feuille de papier) amène à l'idéalité d'une feuille de papier sans épaisseur, infinie dans toutes les directions, et dont les morceaux rectilignes et continus qu'on y dessine ont des longueurs qui s'expriment par des nombres, lesquels ne varient pas si on déplace de tels segments : de cette idéalité est née en mathématiques le plan euclidien réel, dont la construction, si elle tente de répondre à nos sens et nos expériences n'est pas d'évidence et a une histoire qui se mesure en siècles.

Premiers axiomes de la géométrie du plan : partie affine.

En logique mathématique, un axiome est un énoncé avec une syntaxe permettant de lui attribuer une valeur de vérité , ainsi la phrase $x =$ ne peut pas être un axiome puisque elle ne dit pas à quoi peut être égal x, il est exprimé en langage naturel ou peut utiliser des signes ou des symboles -ici la langue sera le français- et on lui attribue la valeur vraie pour tous les objets auxquel il se réfère. Un axiome s'applique aux objets dont la collection forme l'univers de ce quoi l'on traite, et pour qu'existe un discours sur l'univers il a été nécessaire de recourir à plusieurs axiomes. Ceux ci sont de plus choisis pour ne pas obtenir de contradiction : c'est à dire qu'un ensemble d'axiomes ne doit pas par deux raisonnements différents amener à deux valeurs de vérité vrai et faux d'une phrase logique donnée. Un célèbre théorème de logique assure qu'il y a toujours des systèmes d'axiomes sans contradiction mais qu'alors il existe des indécidables : ce sont des phrases logiques indémontrables par déduction des axiomes choisis.

Voici donc des axiomes pour l'idéalité du plan et des droites : ceux ci sont le résultat d'expériences avec des figures et du travail des nombreux mathématiciens et géomètres qui se sont suivis.

- **L'univers considéré, le plan, est un ensemble infini de points qui en sont les éléments. Dans cet univers il existe des sous-ensembles de points propres (contenus dans le plan sans leur être égaux) appelés droites et vérifiant ce qui suit :**
- **Etant données deux droites différentes**
  - **Soit elles n'ont pas de point commun : on dit alors qu'elles sont parallèles.**
  - **Soit elles n'ont qu'un seul point commun.**
- **Etant donnés une droite D et un point P qui n'appartient pas à D alors il n'existe qu'une seule droite parallèle à D dont P est un point.**
- **Etant donnés A et B deux points différents alors il n'existe qu'une seule droite D dont A et B sont des points.**
- **Etant donné une droite D et deux points O et A sur D : à tout point M on peut associer un nombre réel**

unique (vu de prime abord comme un nombre à écriture décimale illimitée) réel noté $\overline{OM}$ tel que
– $\overline{OO} = 0$
– $\overline{OA} = 1$

Inversement, un nombre réel x étant donné on peut trouver un point M et un seul de la droite tel que $x = \overline{OM}$.

$M \in D$ étant donné, le nombre réel $\overline{OM}$ s'appelle une **mesure algébrique** de M (en effet, si on fixe le point O, alors pour chaque choix de A correspond une mesure algébrique, et l'ensemble des mesures algébriques pour un O donné est un ensemble de fonctions de D dans l'ensemble des nombres réels qui sont proportionnelles). On peut écrire $D \backslash \{A\}$ comme la réunion des deux ensembles sans point commun

$$D^+ = \{M \in D / \overline{OM} > 0\}$$

$$D^- = \{M \in D / \overline{OM} < 0\}$$

ce qui permet de définir un sens de parcours de D (on appelle une telle réunion une **partition**).
Cette notion de mesure algébrique permet, étant donnée une droite D, de définir à la fois ce qu'est le segment $[M, N]$ de D et ce qui est sa longueur de la manière suivante : une mesure algébrique étant choisie sur D (autrement dit la donnée de

deux points distincts O et A) le segment $[M, N]$ est l'ensemble des points P tels que la mesure algébrique $\overline{OP}$ soit comprise entre les mesures algébriques $\overline{OM}$ et $\overline{ON}$, et la longueur du segment, appelée aussi distance de M à N, est alors définie par $|\overline{ON} - \overline{OM}|$, où $|x|$ la valeur absolue de x, est x si $x \geq 0$ et $-x$ si $x \leq 0$ (ainsi $|1| = 1 = |-1|$).
La bijection (qui a été aussi appelée correspondance bi-univoque) entre nombres réels et points d'une droite n'est autre que celle qui définit un point par sa distance, signée par l'orientation, avec un point origine O arbitrairement choisit sur la droite, ne va pas de soit. Il est apparu dans l'histoire que les seuls nombres rationnels (c'est à dire égaux au rapport $\dfrac{a}{b}$ de deux entiers) ne suffisaient pas, bien que ceux-ci eussent la propriété de densité suivante : on peut toujours trouver deux nombres rationnels aussi proches l'un de l'autre qu'on le souhaite, et entre deux tels nombres il existe une infinité de nombres rationnels. L'insuffisance des nombres rationnels pour mesurer des distances est apparue par le théorème de Pythagore qui nous dit que le carré (au sens du produit par lui même) de la longueur de la diagonale d'un carré de coté 1 est 2 (cette longueur est $\sqrt{2}$: racine de 2). Or, si on connaît les propriétés de décomposition de nom-

bres entiers en produit de nombres premiers, on peut montrer qu'aucun rapport d'entiers ne peut avoir de carré égal à 2 ! Il convient pour mesurer les longueurs, d'introduire un ensemble de nombres qui soit plus « grand» que celui des nombres rationnels : c'est ainsi qu'au cours de l'histoire les hommes ont construit les nombres appelés réels. Il ne faut pas prendre le mot réel au sens de «seuls vrais» ou même de «vrais», mais au sens suivant : A l'échelle humaine et terrestre, dans le cadre d'une feuille de papier ou du tableau les propriétés des nombres réels semblent suffisantes pour bien se représenter des longueurs de segments, lesquelles ne doivent pas varier par déplacement tout en respectant les relations (qui sont des théorèmes dans une bonne axiomatique) dites de Pythagore (sur les carrés des longueurs des triangles rectangles) de Thalès (relations de projection de trois points sur deux droites), d'Euclide (relation entre droites parallèles ou non et points) . Voici, les relations qui décrivent les nombres dits réels.

- Les réels s'additionnent et se multiplient suivant des règles qui en font un corps de nombres et qui sont illustrés ci-après.

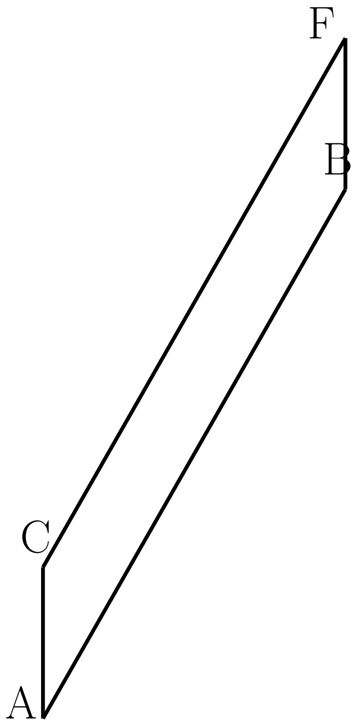
Voici le groupe abélien du funambule : L'écolier trace un trait à la craie, tend les bras et joue au fu-

nambule. Quand il avance d'une première longueur puis d'une deuxième longueur il a autant avancé que de la deuxième longueur puis de la première. Quand il n'avance pas il avance de zéro, ajouté à ce qu'il a déjà avancé, cela ne change pas sa progression. Quand il avance d'une longueur et recule d'autant il n'a pas avancé : antant dire qu'il a avancé de zéro.
Les réels se multiplient et l'ensemble des réels privé de zéro forme un groupe abélien dont 1 est le neutre.

- Voici le groupe abélien des feuilles de papiers découpées : Si deux nombres sont positifs alors l'écolier découpe une feuille de papier rectangulaire ou carrée dont les longueurs des deux cotés adjacents sont ces deux nombres puis il la pose sur un cahier. Quand il y a des nombres négatifs, au plus deux, l'écolier fait comme précédemment avec les opposés positifs des négatifs, puis, en au plus deux mouvements, il recouvre et découvre le cahier de la feuille découpée. On convient finalement que le produit des deux nombres est la surface de la feuille si elle recouvre le cahier, son opposé si elle ne le recouvre pas.

A ce stade, il faut remarquer que les axiomes donnés sont insuffisants pour définir à la fois le plan et une distance entre deux points du plan qui satisfasse à ce que nos sens expriment des deux dimensions d'espace du plan (ces axiomes sont en effet aussi vrais dans ce que nous percevons de notre espace à trois dimensions) et d'une distance d'un segment qui ne varie pas par translation ou rotation de ce segment (fixons-nous en effet dans le plan une courbe fermée et symétrique par rapport à un point O et telle que cette courbe ai deux points d'intersections avec toute droite passant par O : une telle courbe existe bien, il suffit de considérer une ellipse et pour O son centre de symétrie). Pour chaque point P du plan, on considère la droite OP qui a deux intersections avec la courbe, et on considère la mesure algébrique définie par O et une de ces deux intersections : on a ainsi construit une ≪ mesure algébrique≫ et la ≪ distance≫ que s'y rattache ne répond pas à notre notion de distance ≪ habituelle≫ , puisque l'ensemble des points à distance 1 de O est la courbe de départ, laquelle n'est pas un cercle **à priori**. Pour définir la notion de plan et de distance nous allons avoir recours à la notion de parallélogramme.

Etant donnée deux droites D et D' qui se coupent en un point A. Fixons sur D un point B différent de A et sur D' un point C différent de A alors, d'après les axiomes précédents, la droite parallèle à D passant par C et celle parallèle à D' passant par B ne sont pas parallèles et ont pour intersection un point unique F (voir figure ci-dessous).



Le quadrilatère (A, B, F, C) dont les cotés sont deux à deux parallèles est appelé un parallélogramme : (A, F) et (B, C) sont des points dit sommets opposés.
On peut à présent ajouter deux axiomes qui vont servir à fixer le nombre de dimensions d'espace à deux.

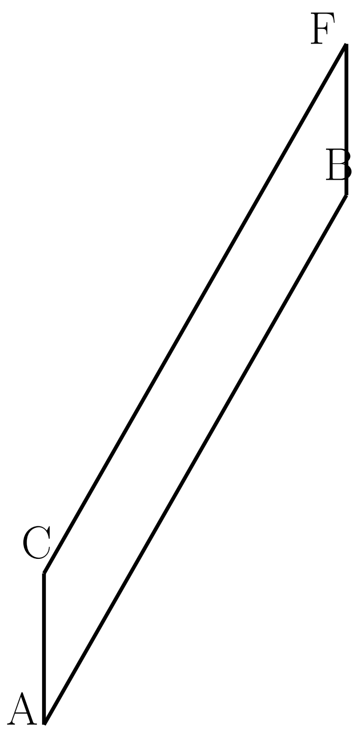
- **Dans l'univers considéré, il existe un parallélogramme.**

- **Soit deux droites D et D' non parallèles et O leur intersection, alors pour tout point M différent de O il existe un parallélogramme dont les cotés sont parallèles à D et D' et dont O et M sont des sommets opposés.**

Le premier énoncé équivaut à : Dans l'univers considéré il y a au moins deux droites non parallèles : il empêche de réduire l'univers à une droite en fixant le nombre de dimensions d'espace à deux au moins.
Le deuxième énoncé fixe à au plus deux le nombre de dimensions d'espace. En effet dans un espace à trois dimensions dans lequel on se donne deux droites qui ont un seul point d'intersection, les points M considérés sont dans le plan formé par les deux droites concourantes.

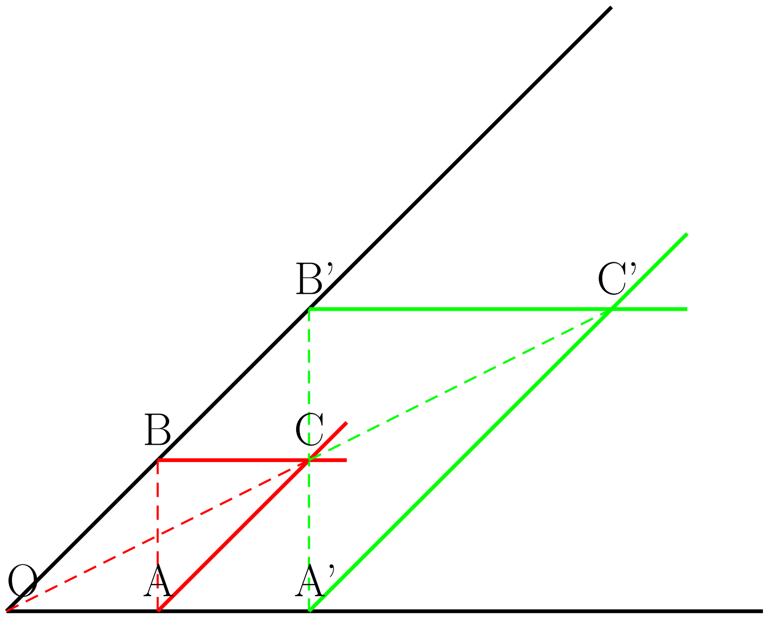
De la mesure algébrique d'une droite de référence vers le plan

Par les axiomes qui précèdent, on peut se donner sur chaque droite une mesure algébrique qui représente une distance signée à une origine suivant une unité de mesure donnée. Cette mesure algébrique est unique si on se fixe la droite, l'origine et l'unité. La droite considérée, une origine et une unité étant fixées, il faut étendre cette mesure algébrique à l'origine à tout le plan, cette mesure doit vérifier en outre des propriétés que nos sens et nos mesures expérimentent. La première de celles-ci est l'invariance de cette mesure par translation qui est illustrée par la figure (un parallélogramme) qui suit :



Si la droite de référence est la droite qui passe par A et B, l'origine de cette droite en A, la mesure algébrique sur cette droite est donnée par $\overline{AB} = 1$, alors à la fois nos sens et notre expérimentation nous disent que $\overline{AB} = 1 = \overline{CF}$ (voir figure ci-dessus).

Une deuxième expérimentation est donnée la figure ci-dessous :



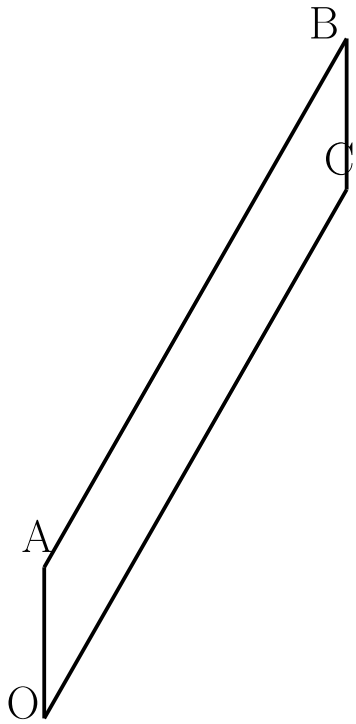
Les droites non parallèles D et D' ayant pour intersection O, on choisit sur D deux points A et A' différents de O, et sur D' deux points B et B' différents de O, on construit les deux parallélogrammes (O, A, C, B) et (O, A', C', B') et on mesure les distances OA, OA', OB, OB'. On constate que si les rapports $\dfrac{OA}{OA'}$ et $\dfrac{OB}{OB'}$ sont égaux alors les diagonales des parallélogrammes sont parallèles.

Ceci conduit à l'axiome des diagonales : **Un point**

O du plan étant fixé on peut fixer les mesures algébriques sur toute droite passant par O de la manière suivante. Si D et D' sont deux droites distinctes d'intersection $\{O\}$ et si A, A' sont deux points de D et B, B' deux points de D' tels que $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}$ alors si (O, A, C, B) et (O, A', C', B') sont deux parallélogrammes, les droites (OC) et (OC'), les droites (A, B) et (A', B') sont deux à deux parallèles.

Deux points du plan A et B distincts étant donnés, nous sommes en mesure de définir la distance AB à l'aide d'une notion de mesure algébrique sur le plan. Pour cela on fixe un point O du plan et on considère les deux cas suivants qui s'excluent :

- La droite AB passe par O alors $\overline{AB}$ est donnée par l'axiome précédent.
- La droite AB ne passe pas par O, alors les droites OA et OB sont distinctes et non parallèles, il existe, suivant les axiomes qui précèdent, un seul point C du plan tel que (O, A, B, C) soit un parallélogramme (voir figure ci-dessous)

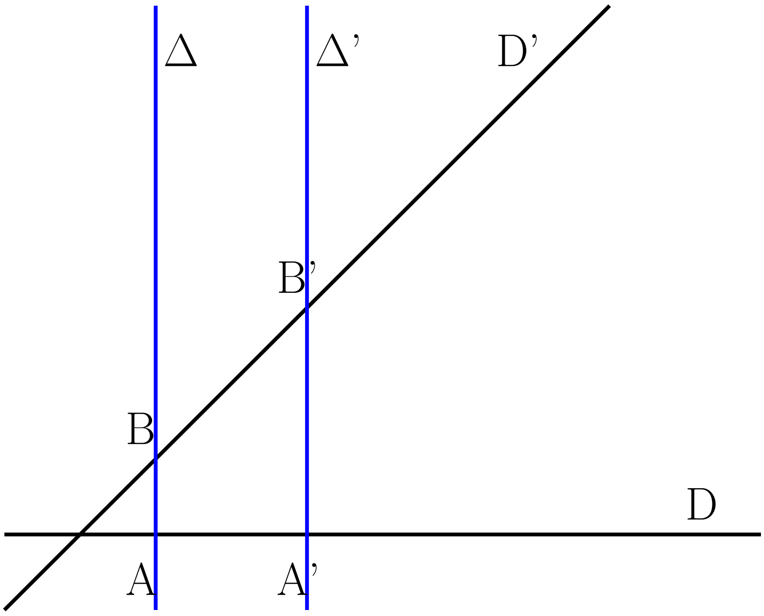


On définit alors $\overline{AB}$ comme égale à $\overline{OC}$, où $\overline{OC}$ est donnée par l'axiome précédent.
On a ainsi définit $\overline{AB}$ pour tout point A et B la distance AB est alors définie par $AB = |\overline{AB}|$ si A est différent de B, par 0 si $A = B$.

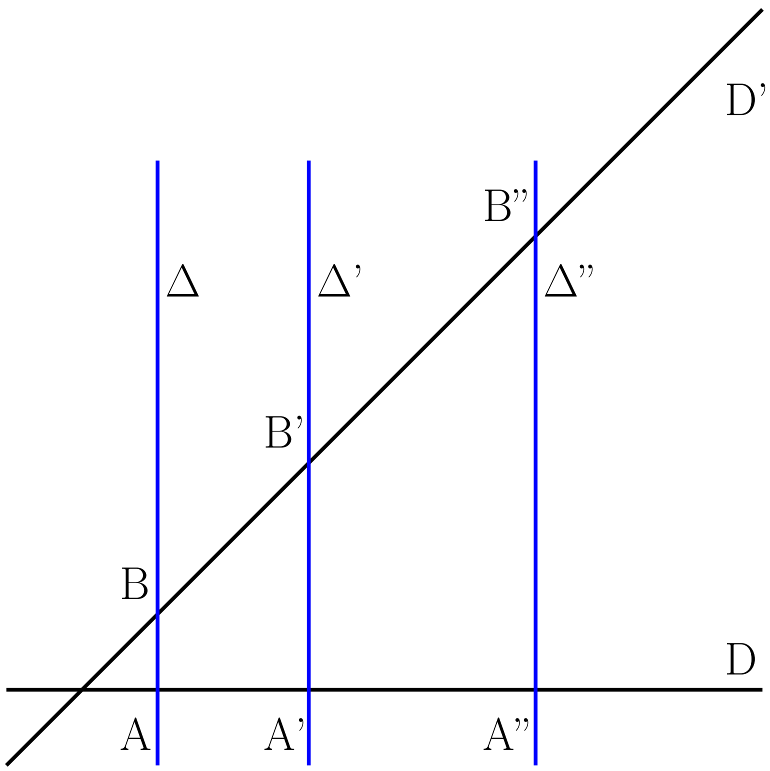
Le théorème de Thalès

Le dernier axiome permet l'obtention du théorème de Thalès (plusieurs énoncés sont possibles).
Enonçons le : Soient D et D' deux droites dis-

tinctes, Δ et Δ' sont deux droites parallèles qui ont pour intersection avec D et D' les points A, A' et B, B' (voir figure ci-dessous)



Une droite Δ'' non parallèle à D et D' a pour intersection avec D et D' les points A'' et B'', alors Δ'' est parallèle à Δ et Δ' si et seulement si $\dfrac{\overline{AA'}}{\overline{A'A''}} = \dfrac{\overline{BB'}}{\overline{B'B''}}$.



Voici une preuve : Nous supposons que la droite Δ'' est parallèle aux droites Δ et Δ' :

- Si les droites D et D' sont parallèles alors (A, A', B', B) et (A', A'', B', B'') sont des parallélogrammes et par suite $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ et $\overline{A'A''} = \overline{B'B''}$ et $\dfrac{\overline{AA'}}{\overline{A'A''}} = \dfrac{\overline{BB'}}{\overline{B'B''}}$ suit.
- Sinon, on appelle O l'intersection de D et D' et on appelle C, C', C'' les points uniquement déterminés tels que (O, A, C, B), (O', A', C', B'), (O'', A'', C'', B'') soient des parallélogrammes. Remarquons que les diagonales (A, B), (A', B')

et (A'', B'') sont parallèles puisque $A, B \in \Delta$, $A', B' \in \Delta'$ et $A'', B'' \in \Delta''$ il suit d'après l'un des axiomes que

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OA''}}{\overline{OB''}}$$

Soit $\begin{cases} \overline{OA} \times \overline{OB'} = \overline{OA'} \times \overline{OB} \\ \overline{OA'} \times \overline{OB''} = \overline{OA''} \times \overline{OB'} \\ \overline{OA} \times \overline{OB''} = \overline{OA''} \times \overline{OB} \end{cases}$, alors

$$\begin{aligned} \overline{AA'} \times \overline{B'B''} &= (\overline{OA'} - \overline{OA})(\overline{OB''} - \overline{OB'}) \\ &= \overline{OA'} \times \overline{OB''} - \overline{OA'} \times \overline{OB'} \\ &\quad - \overline{OA} \times \overline{OB''} + \overline{OA} \times \overline{OB'} \\ &= \overline{OB'} \times \overline{OA''} - \overline{OB'} \times \overline{OA'} \\ &\quad - \overline{OB} \times \overline{OA''} + \overline{OB} \times \overline{OA'} \\ &= (\overline{OB'} - \overline{OB})(\overline{OA''} - \overline{OA'}) \\ &= \overline{BB'} \times \overline{A'A''} \end{aligned}$$

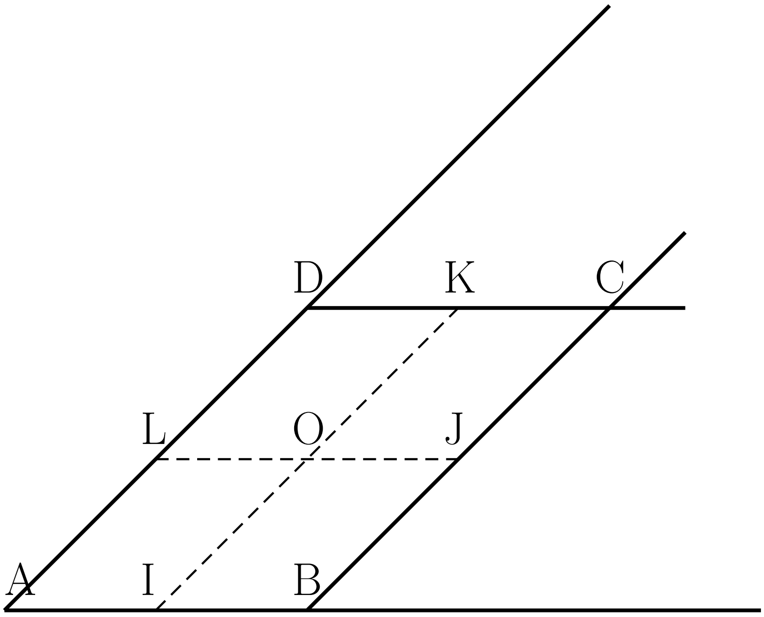
Donc $\overline{AA'} \times \overline{B'B''} = \overline{BB'} \times \overline{A'A''}$ soit

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'A''}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'B''}}$$

Réciproquement, supposons que $\dfrac{\overline{AA'}}{\overline{A'A''}} = \dfrac{\overline{BB'}}{\overline{B'B''}}$ alors on considère δ'' la droite parallèle à Δ et Δ'' qui passe par A'' : elle coupe D' en M, qui d'après la première partie de la preuve vérifie $\dfrac{\overline{AA'}}{\overline{A'A''}} = \dfrac{\overline{BB'}}{\overline{B'M}}$. Mais comme $\dfrac{\overline{AA'}}{\overline{A'A''}} = \dfrac{\overline{BB'}}{\overline{B'B''}}$, c'est que $\overline{B'M} = \overline{B'B''}$ et donc $M = B''$. Il suit que δ, la droite (A'', B''), est la droite Δ'' et donc Δ'' est parallèle à Δ et Δ'.

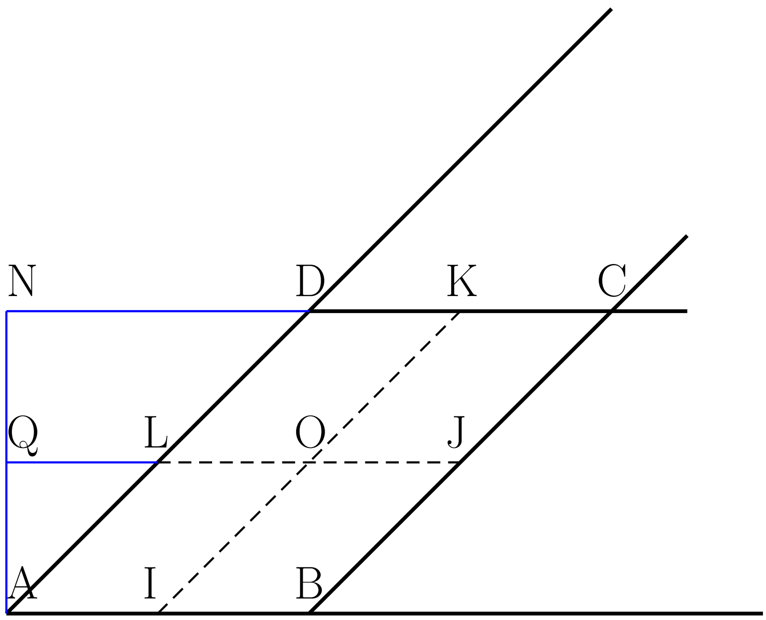
Les diagonales d'un parallélogramme

Soit (A, B, C, D) un parallélogramme et (I, J, K, L) les milieus de $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$, $[A, D]$ alors, puisque $\dfrac{\overline{AL}}{\overline{LD}} = \dfrac{\overline{BJ}}{JC} = 1$, les droites (A, B), (L, J) et (D, C) sont parallèles. Puisque $\dfrac{\overline{DK}}{\overline{KC}} = \dfrac{\overline{AI}}{IB} = 1$, les droites (A, D), (I, K) et (B, C) sont aussi parallèles.
On appelle O l'instersection des droites (L, J) et (I, K) (voir figure ci-dessous)



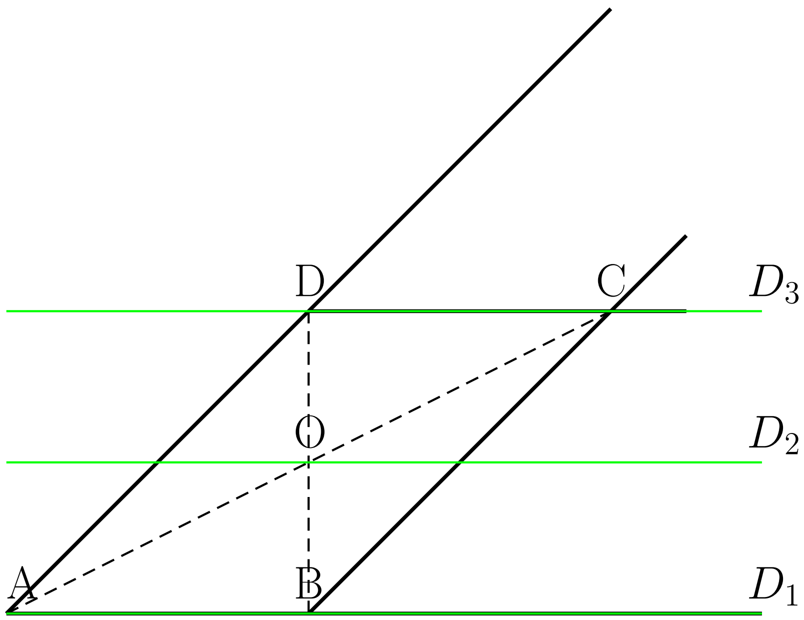
Alors les diagonales (D, B) et (AC) se coupent en O qui est de plus le milieu de $[D, B]$ et $[A, C]$. En effet, (A, I, O, L) est un parallélogramme et de $\frac{\overline{AI}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AL}}{AB}(= \frac{1}{2})$ il suit par l'axiome des diagonales que les diagonales AO et AC sont parallèles et les points A, O C sont donc alignés, $(D, L, O, K,)$ est un parallélogramme et de $\frac{\overline{DK}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DL}}{DA}(= \frac{1}{2})$ il suit par l'axiome des diagonales que les diagonales DO et DB sont parallèles et les points D, O, B sont donc alignés. O est l'intersection commune des **médianes** et des diagonales du parallélogramme (A, B, C, D).

Considérons la figure suivante :



Par A la parallèle à la diagonale (DB) a pour intersection avec (CD) le point N, la droite (LJ) a pour intersection avec la droites (NA) le point Q. L est le milieu de $[A, D]$ et donc $\frac{\overline{AD}}{\overline{AL}} = 2$ et par le théorème de Thalès $\frac{\overline{AN}}{\overline{AQ}} = 2$: Q est le milieu de $[A, N]$. N, Q, A et D, O, B sont des triplets de points des droites (A, N) et (D, B), les droites (ND), (QO), (AB) sont parallèles. Par le théorème de Thalès $2 = \frac{\overline{AN}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BO}}$: O est milieu de B et D.

Considérons à présent la figure :



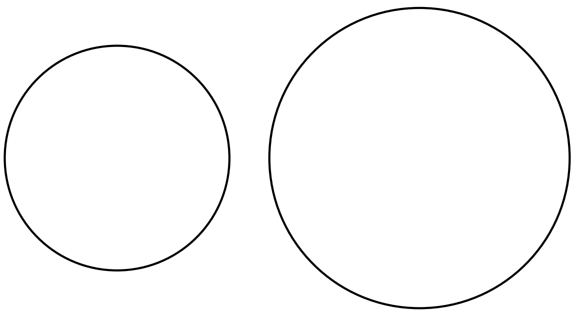
D_1 et D_3 sont les droites AB et DC, D_2 est la parallèle à D_1 et D_2 qui passe par O, elle coupe les diagonales (DB) et (CA) en $O = O'$. Le théorème de Thalès entraîne alors que $2 = \frac{\overline{BD}}{\overline{BO}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AO}}$. O est milieu de $[A, C]$.
Soient A et B deux points distincts du plan et D la droite qui passe par A et B alors le milieu I de A et B est le point de D tel que $\overline{AI} = \overline{IB}$

Cercles

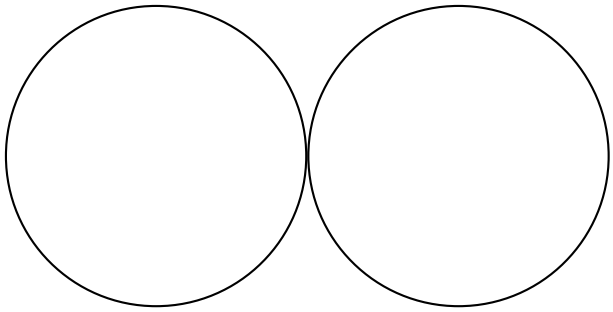
Définition ensembliste d'un cercle, axiomes d'intersection

Par l'expérimentation du compas dont on fixe l'écartement à une longueur donnée on définit le cercle de centre O et de rayon R qu'on note $C(O, R)$, où O est un point du plan et R un nombre réel positif, comme l'ensemble des points M dont la distance à O est R. Les axiomes sur les cercles et les droites qui suivent sont donnés par les expériences «sur le papier».

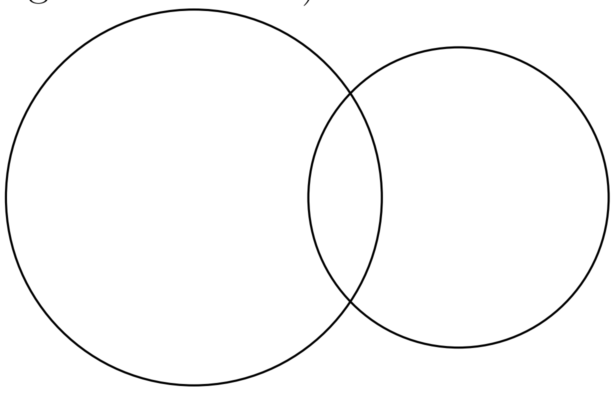
- Si $R = 0$ alors le cercle $C(O, R)$ n'est pas réduit à un nombre fini de points.
- Si $R > 0$ alors le cercle $C(O, R)$ n'est pas réduit au seul point O.
- Si O et O' sont deux points distincts du plan et si $R > 0$, $R' > 0$ alors l'intersection des cercles $C(O, R) \cap C(O', R')$ est
  - Si $R + R' > OO'$ vide (voir figure ci dessous)



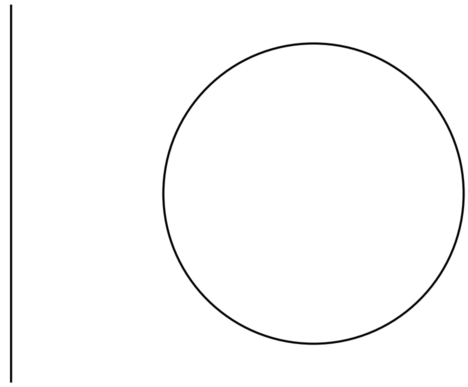
– Si $R + R' = OO'$ réduite à un point, on dit que les cercles sont tangents (voir figure ci dessous)



– Si $R + R' < OO'$ égale à deux points (voir figure ci dessous)

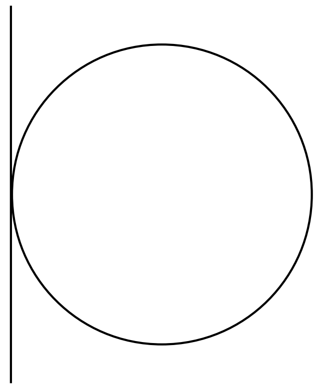


– l'intersection d'un cercle et d'une droite est



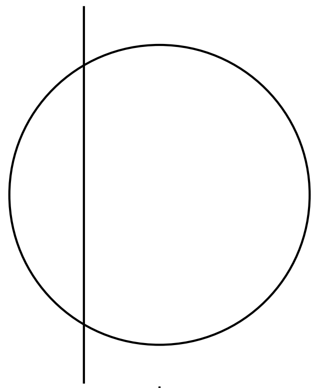
– soit vide

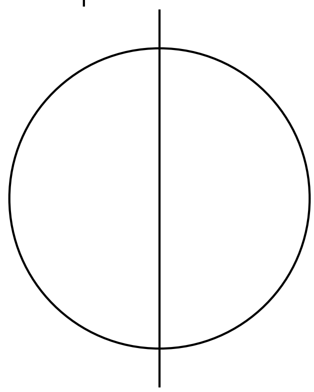
– soit réduite à un point : la droite est alors dite



tangente au cercle.

– soit égale à deux points. L'intersection d'un cercle avec une droite passant par son centre est égale à deux points dits « diamétralement opposés »ce qui a pour conséquence qu'un cercle n'est pas une droite.



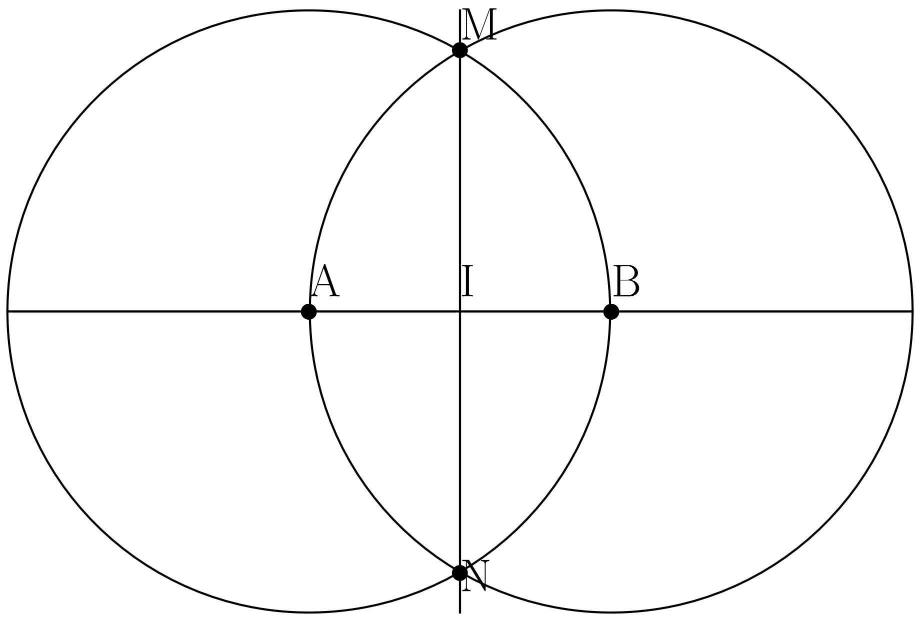


Conséquence : existence d'une droite médiatrice de deux points

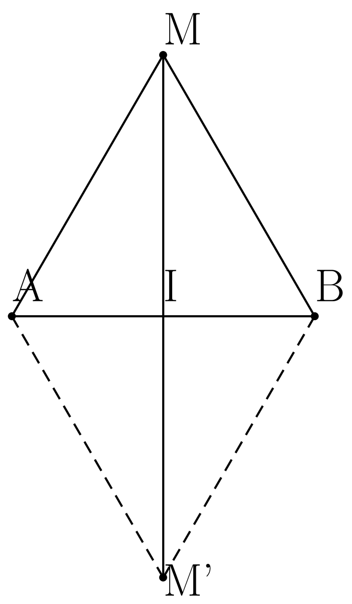
Etant donnés deux points du plan A et B **distincts**, on s'intéresse à l'ensemble des points M équidistants de A et B qui est aussi l'ensemble des points M tels que $\overline{AM} = \pm\overline{BM}$ et on montre que l'ensemble de ces points est une droite qui passe par le milieu I de A et B.

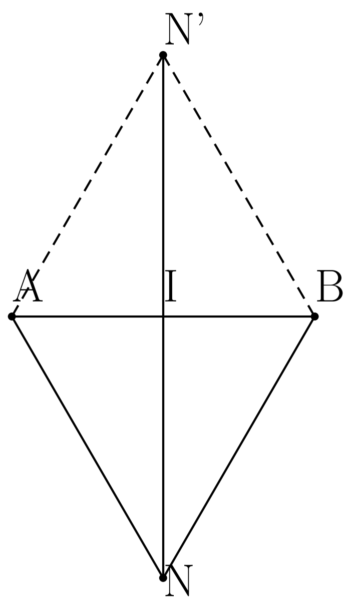
Voici une preuve : I le milieu de A et B est le point tel que $\overline{AI} = \overline{IB} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$, l'ensemble des points équidistants de A et B contient au moins le point I. Considérons les cercles de centre A et

B et de rayon la distance AB. Comme la somme des rayons de ces cercles est deux fois la distance de A à B l'intersection de ces cercles est constitue de deux points M et N qui ne sont ni A ni B ni I.



(A, M, B, N) est un parallélogramme : Si (A, M, B, M') et (A, N', B, N) sont les paralléllogrammes dont trois sommets sont A, M, B et A, B, N


M
A
I
B
M'



alors comme $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{\overline{BN}}} = \dfrac{\overline{AN}}{BN} = 1$, les diagonales de ces parallélogrammes sont parallèles et se coupent en I milieu de A, les droites (M, M') et (N, N') sont parallèles et passent par I, elles sont donc égales. Puisque (A, M, B, M') et (A, N', B, N) sont des paralléllogrammes les distances AM et BM' sont égales (à R) et les distances AN' et BN (à R) : ceci signifie que les points M, M', N, N' sont dans l'intersection des cercles de centres A et B et de rayon AB qui ne contient que deux points. Nécessairement $M = N'$ et $N = M'$,

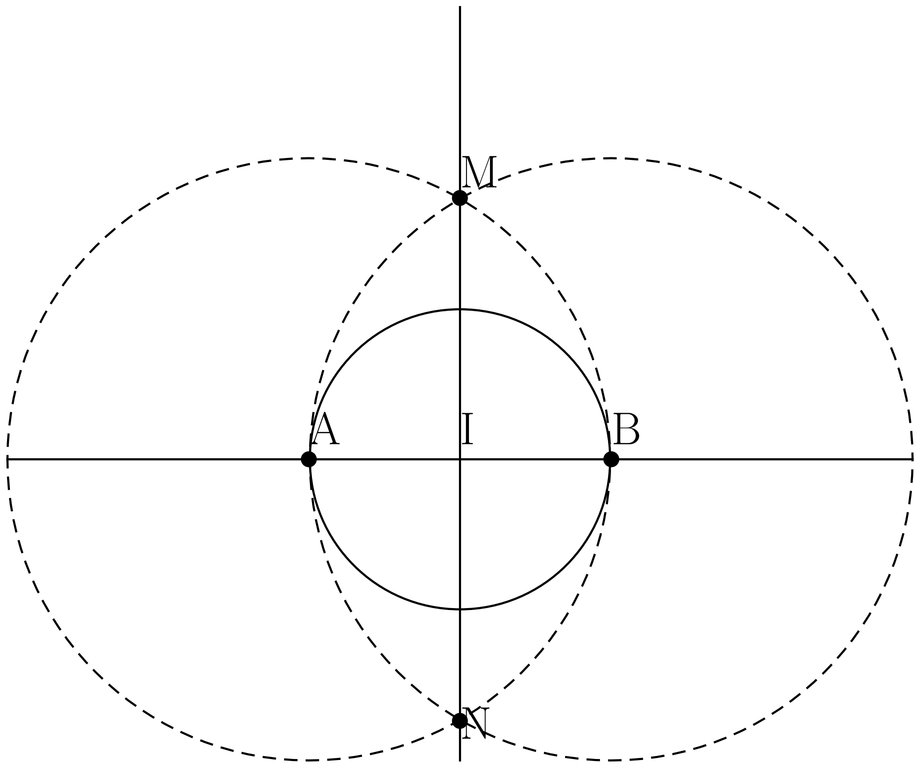
$(A, M, B, N) = (A, M, B, N')$ est donc un parallélogramme.
L'ensemble des points P tels que $AP = BP$ est la droite (MN) :

- Si P est un point tel que $AP = BP$ alors soit Q le point tel que (A, P, B, Q) soit un parallélogramme alors $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}$, ceci entraine que les diagonales (PQ) et (MN) sont parallèles, elles croisent la diagonale commune (AB) au milieu I de A et B. Les droites (MN) et (PQ) sont parallèles et ont un point commun I, elles sont donc égales et P appartient à la droite (MN).
- Si P appartient à la droite (M, N), et si Q est le point tel que (A, P, B, Q) soit un parallélogramme alors (AB) est une diagonale commune à (A, P, B, Q) et (A, M, B, N) et les autres diagonales passent par I milieu de A et B et $P \in (MN)$: ayant deux points communs les droites (MN) et (PQ) sont égales et les parallélogrammes (A, P, B, Q) et (A, M, B, N) sont parallèles, il suit que $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = 1$ et donc $AP = BP$, P appartient à la médiatrice de A et B.

Nous nous donnons une droite D et deux points distincts A et B sur D. Soient C et D deux autres points distincs sur D alors

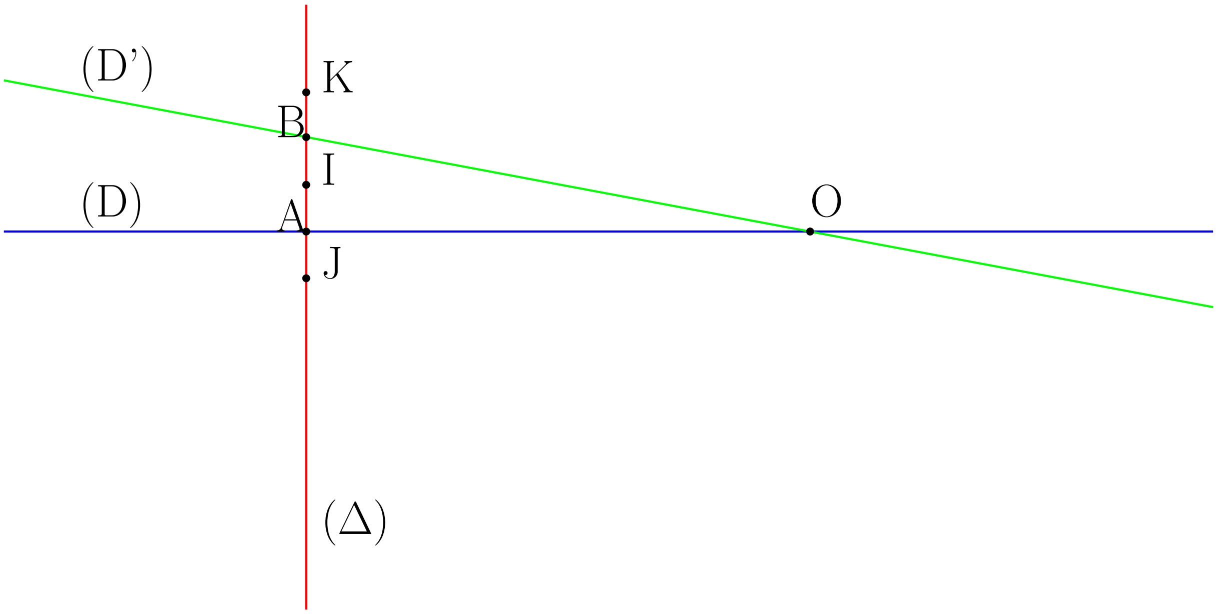
- Si $\{A, B\} = \{C, D\}$ les médiatrices de A et B et les médiatrices sont par définition égales.
- Si $\{A, B\} \neq \{C, D\}$ alors les médiatrices de A, B et C, D sont parallèles. En effet l'ensemble $E = \{A, B\} \cup \{C, D\}$ contient alors au moins trois points. Sans restreindre la généralité on peut supposer que A, B, C sont trois points distincts de E. Appelons Δ et Δ' les médiatrices de A et B et de C et D alors si ces deux droites ont un point commun P ce point est tel que $PA = PB = PC$. Ceci s'interprète comme suit : le cercle de centre P et de rayon $R = PA$ a dans son intersection avec la droite D au moins les trois points A, B et C. L'intersection d'une droite et d'un cercle comprenant au plus deux points, on en déduit que Δ et Δ‘ ne peuvent se couper elles sont parallèles.

Définition de la droite orthogonale d'une droite passant par un point de cette droite : On se donne une droite D et un point $I \in D$, soient A, B deux points tels que I soient milieu de A et B (deux tels points existent toujours il suffit de prendre l'intersection de D avec n'importe quel cercle centré en I) alors la droite orthogonale à D passant I est défini comme la médiatrice de A et B et il suit de ce qui précède que si I' est un autre point de D les orthogonales à D passant par I et passant par I' sont parallèles. On a de plus une construction à la règle et au compas de l'orthogonale d'une droite passant par un de ses points I sur la figure qui suit :



perpendiculaire d'une perpendiculaire

Soit une droite (D) et un point (A) de (D), (Δ) est la perpendiculaire à (D) passant par A. Par un point $B \neq A$ on mène la perpendiculaire (D') à (Δ) et passant par B alors (D) et (D') sont parallèles : nous appelons I le milieu et J, K les points de Δ tels que $\overline{AI} = \overline{AJ}$ et $\overline{IB} = \overline{BK}$ alors (D) est la médiatrice de I et J et (D') la médiatrice de I et K.
Supposons que (D) et (D') ont un point d'intersection O alors comme (D) et (D') sont des médiatrices, il suit que $OI = OJ = OK$, ce qui veut dire que le cercle de centre O et de rayon $R = OI = OJ = OK$ rencontre la droite (Δ) au moins aux trois points I, J et K. Comme une droite et un cercle ont au plus deux points d'intersections, ceci est impossible. (D) et (D') n'ont pas de point d'intersection et sont donc parallèles.


(D')
K
B
I
(D)
A
O
J
(Δ)