Angles

Alain Wazner

Groupes d'applications affines bijectives du plan et de leurs parties linéaires.

La phrase commune «L'ensemble E est un groupe» n'a pas de sens si on précise pas l'opération de groupe, ainsi l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est un groupe pour l'opération d'addition mais pas pour celle de multiplication car 0 n'a pas d'inverse. La composition des applications d'un ensemble E vers lui-même étant associative, l'ensemble des bijections d'un ensemble E vers lui-même est un groupe pour l'opération de composition des applications si l'application identique Id est élément de E, si la composition de deux éléments de E est un élément de E et si l'inverse d'un élément de E est dans E. Dans ce qui suit E sera le groupe des applications bijectives du plan euclidien sur lui-même ou un de ses sous-groupes : ensemble des applications affines bijectives, des isométries, des déplacements. On considérera aussi les groupes des parties linéaires des éléments de ces sous-groupes.

Groupes des applications affines bijectives du plan et de leurs parties linéaires.

Le noyau de la partie linéaire d'une application affine.

Si f est une application affine, le noyau $Ker\,(\mathcal{L}(f))$ de son application affine est l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ qui vérifient $\mathcal{L}(f)\,(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{0}$

appartient toujours à $Ker\,(\mathcal{L}(f))$.
En effet si M est un point du plan :

$$\mathcal{L}(f)(\overrightarrow{0}) = \mathcal{L}(f)(\overrightarrow{MM}) = \overrightarrow{f(M)f(M)} = \overrightarrow{0}$$

f affine est bijective si et seulement si $Ker\,(\mathcal{L}(f))$ est réduit à $\overrightarrow{0}$: Si f est bijective, alors si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ on peut écrire $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN}$ avec $M \neq N$, comme f est bijective $f(M) \neq f(N)$ donc

$$\mathcal{L}(f)(\overrightarrow{u}) = \mathcal{L}(f)(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)} \neq \overrightarrow{0}$$

$Ker\,(\mathcal{L}(f))$ est réduit à $\overrightarrow{0}$.

Si $Ker\,(\mathcal{L}(f))$ est réduit à $\overrightarrow{0}$ alors f est une application linéaire injective : dans le cas contraire on pourrait trouver deux points distincts M et N qui vérifient $f(M) = f(N)$, l'image par $\mathcal{L}(f)$ du vecteur non nul $\overrightarrow{MN}$ serait le vecteur nul $\overrightarrow{f(M)f(N)}$.
f est alors bijective car toute application affine injective du plan sur lui-même est bijective.
En effet si f affine est injective l'image d'une droite est une droite :

- Si trois points distincts M, N, P sont alignés alors il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{MP} = \lambda\overrightarrow{MN}$ on en déduit que

$$\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{MP}\right) = \mathcal{L}(f)\left(\lambda\overrightarrow{MN}\right) = \lambda\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{MN}\right)$$

soit $\overrightarrow{f(M)f(P)} = \lambda\overrightarrow{f(M)f(N)}$: les trois points distincts M, N, P sont alignés.

- Sur une droite (D) fixons deux points M et N et choisissons un troisième point arbitraire sur (D) alors comme $f(P), f(M), f(N)$ sont alignés, l'image par f de (D) est incluse dans la droite passant par $f(M)$ et $f(N)$.
- Pour un point Q de la droite passant par $f(M)$ et $f(N)$, il existe une valeur $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{f(M)Q} = \lambda\overrightarrow{f(M)f(N)}$ et comme l'image $f(P)$ du point P de (D) tel que $\overrightarrow{MP} = \lambda\overrightarrow{MN}$ vérifie $\overrightarrow{f(M)f(P)} = \lambda\overrightarrow{f(M)f(N)}$, on en déduit que $\overrightarrow{f(M)Q} = \overrightarrow{f(M)f(P)}$ soit $f(P) = Q$: l'image par f d'une droite D **est** la droite passant par $f(M)$ et $f(N)$ où M et N sont deux points distincts arbitraires de (D).

Si (O, A, B) **ne sont pas alignés alors** $(f(O), f(A), f(B))$ **ne sont pas alignés** : s'ils l'étaient alors $f(O)$ serait l'image de O et d'un point de la droite (AB) : f ne serait pas injective. $(f(O), f(A), f(B))$ est alors un repère affine du plan, c'est à dire que pour tout point N du plan on peut toujours trouver $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$\overrightarrow{f(O)N} = x.\overrightarrow{f(O)f(A)} + y.\overrightarrow{f(O)f(B)}$$

$$
\begin{aligned}
x.\overrightarrow{f(O)f(A)} + y.\overrightarrow{f(O)f(B)} &= x.\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{OA}\right) + y.\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{OB}\right) \\
&= \mathcal{L}(f)\left(x.\overrightarrow{OA} + y.\overrightarrow{OB}\right)
\end{aligned}
$$

Posons $\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{OA} + y.\overrightarrow{OB}$ alors

$$\overrightarrow{f(O)N} = \mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$$

et de $\overrightarrow{f(O)N} = \overrightarrow{f(O)f(M)}$ on déduit que $N = f(M)$. Le point N étant un point arbitraire du plan : f est surjective.

Composition d'applications affines, de leurs parties linéaires.

Si f et g sont affines alors $f \circ g$ est affine.
car $\overrightarrow{f \circ g(M) f \circ g(N)} = \mathcal{L}(f) \circ \mathcal{L}(g)\left(\overrightarrow{MN}\right)$ et $\mathcal{L}(f) \circ \mathcal{L}(g)$ est linéaire puisque :

-
$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f) \circ \mathcal{L}(g)\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) &= \mathcal{L}(f)\left(\mathcal{L}(g)(\overrightarrow{u}) + \mathcal{L}(g)(\overrightarrow{v})\right) \\
&= \mathcal{L}(f) \circ \mathcal{L}(g)(\overrightarrow{u}) \\
&\quad + \mathcal{L}(f) \circ \mathcal{L}(g)(\overrightarrow{v})
\end{aligned}
$$

-
$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f) \circ \mathcal{L}(g)\left(\lambda.\overrightarrow{u}\right) &= \mathcal{L}(f)\left(\lambda.\mathcal{L}(g)(\overrightarrow{u})\right) \\
&= \lambda.\mathcal{L}(f) \circ \mathcal{L}(g)(\overrightarrow{u})
\end{aligned}
$$

Une application affine f est bijective si et seulement si $\mathcal{L}(f)$ est bijective.

Si f est bijective alors $Ker\left(\mathcal{L}(f)\right)$ est réduit à $\overrightarrow{0}$ et $\mathcal{L}(f)$ est injective puisque si $\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{u}\right) = \mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{v}\right)$ alors

$$\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right) \in Ker\left(\mathcal{L}(f)\right)$$

soit $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ puis $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.
Soient $\overrightarrow{v}$ un vecteur, fixons un point P du plan, il existe un point N du plan tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PN}$, comme f est bijective il existe O et M tels que $f(O) = P$ et $f(M) = N$, posons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$ alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{u}\right) &= \mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{OM}\right) \\ &= \overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{v} \end{aligned}$$

$\mathcal{L}(f)$ est surjective.
Si $\mathcal{L}(f)$ est bijective alors elle est injective, il suit que $Ker\left(\mathcal{L}(f)\right)$ est réduit à $\overrightarrow{0}$ puisque si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de $Ker\left(\mathcal{L}(f)\right)$ alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right) &= \mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{u}\right) - \mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{v}\right) \\ &= \overrightarrow{0} - \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Il n'y a donc qu'un seul vecteur dans $Ker\left(\mathcal{L}(f)\right)$ qui est réduit à $\overrightarrow{0}$ puisque $\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$, f est donc bijective.

L'inverse d'une application affine bijective est affine.

Si f est une application affine bijective son inverse f^{-1} est l'unique application g telle que pour tout point M, $f \circ g(M) = g \circ f(M) = M$. Soient M, N, P, Q des points tels que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ alors

$$\overrightarrow{f \circ f^{-1}(M) f \circ f^{-1}(N)} = \overrightarrow{f \circ f^{-1}(P) f \circ f^{-1}(Q)}$$

soit

$$\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{f^{-1}(M) f^{-1}(N)}\right) = \mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{f^{-1}(P) f^{-1}(Q)}\right)$$

et puisque $\mathcal{L}(f)$ est bijective, il suit que $\overrightarrow{f^{-1}(M) f^{-1}(N)} = \overrightarrow{f^{-1}(P) f^{-1}(Q)}$. Puisque l'égalité $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ entraîne l'égalité $\overrightarrow{f^{-1}(M) f^{-1}(N)} = \overrightarrow{f^{-1}(P) f^{-1}(Q)}$ c'est qu'il existe une application, que l'on note $\mathcal{L}(f^{-1})$, telle que $\overrightarrow{f^{-1}(M) f^{-1}(N)} = \mathcal{L}(f^{-1})\left(\overrightarrow{MN}\right)$ quelque soient M et N.

$\mathcal{L}(f^{-1})$ est linéaire bijective et $\mathcal{L}(f^{-1}) = \mathcal{L}(f)^{-1}$:

– Pour tout couple de points A, B,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)\left(\mathcal{L}(f)^{-1}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right) &= \overrightarrow{f\circ f^{-1}(A)f\circ f^{-1}(B)}\\
&= \overrightarrow{AB}\\
&= \overrightarrow{f^{-1}\circ f(A)f^{-1}\circ f(B)}\\
&= \mathcal{L}(f^{-1})\left(\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{AB}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Il suit que

$$\mathcal{L}(f)\circ\mathcal{L}(f^{-1}) = \mathcal{I}d = \mathcal{L}(f^{-1})\circ\mathcal{L}(f)$$

$\mathcal{L}(f^{-1})$ est bijective d'inverse $\mathcal{L}(f)$

- Comme $\mathcal{L}(f)$ est linéaire le vecteur $\mathcal{L}(f)\left(\mathcal{L}(f)^{-1}\left(\overrightarrow{AB}\right)+\mathcal{L}(f)^{-1}\left(\overrightarrow{CD}\right)\right)$ est $\mathcal{L}(f)\left(\mathcal{L}(f)^{-1}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right)+\mathcal{L}(f)\left(\mathcal{L}(f)^{-1}\left(\overrightarrow{CD}\right)\right)$ soit $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} = \mathcal{L}(f)\left(\mathcal{L}(f)^{-1}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)\right)$ Comme $\mathcal{L}(f)$ est bijective c'est donc que

$$\mathcal{L}(f)^{-1}\left(\overrightarrow{AB}\right)+\mathcal{L}(f)^{-1}\left(\overrightarrow{CD}\right) = \mathcal{L}(f)^{-1}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$$

- Comme $\mathcal{L}(f)$ est linéaire le vecteur $\mathcal{L}(f)\left(\lambda.\mathcal{L}(f)^{-1}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right)$ est $\lambda.\mathcal{L}(f)\left(\mathcal{L}(f)^{-1}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right)$ soit $\lambda.\overrightarrow{AB} = \mathcal{L}(f)\left(\lambda.\mathcal{L}(f)^{-1}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right)$ Comme $\mathcal{L}(f)$ est bijective c'est donc que

$$\lambda.\mathcal{L}(f)^{-1}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \mathcal{L}(f)^{-1}\left(\lambda.\overrightarrow{AB}\right)$$

Apparition des groupes des applications linéaires bijectives et de leurs parties linéaires.

Si f et g sont affines et bijectives, leur composée bijective $f \circ g$ est affine de partie linéaire la composée $\mathcal{L}(f) \circ \mathcal{L}(g)$ qui est une application linéaire nécessairement bijective puisque $f \circ g$ est bijective.
Le neutre pour la composition des applications affines est l'application identique du plan $\mathcal{I}d \ : \ M \ \mapsto \ M$ de partie linéaire $Id \ : \ \overrightarrow{u} \mapsto \overrightarrow{u}$, $\mathcal{I}d$ et Id sont affine et linéaire, elles sont bijectives puisque $Ker(Id) = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$.

- L'inverse d'une application affine f bijective est affine, sa partie linéaire est l'inverse de $\mathcal{L}(f)$.

Les applications affines bijectives du plan vers lui même forment un groupe comme **sous-groupe** du groupe des applications bijectives du plan vers lui-même. L'ensemble de leurs parties linéaires est un groupe, sous-groupe des applications bijectives de l'ensemble des vecteurs du plan vers lui-même.

Le groupe des isométries affines et celui de leurs parties linéaires.

- Si f et g sont des isométries affines alors $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(g)$ sont des isométries linéaires et pour tous points A, B, C, D

$$< \overrightarrow{f \circ g(A) f \circ g(B)}, \overrightarrow{f \circ g(C) f \circ g(D)} >=$$
$$< \mathcal{L}(f) \circ \mathcal{L}(g) \left(\overrightarrow{AB}\right), \mathcal{L}(f) \circ \mathcal{L}(g) \left(\overrightarrow{CD}\right) >=$$
$$< \mathcal{L}(g) \left(\overrightarrow{AB}\right), \mathcal{L}(g) \left(\overrightarrow{CD}\right) >=$$
$$< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} >$$

- Si f est une isométrie affine alors $|\mathcal{L}(f)(\overrightarrow{u})| = |\overrightarrow{u}|$, de sorte que si $\mathcal{L}(f)(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$: f et $\mathcal{L}(f)$ sont alors bijectives puisque $Ker\left(\mathcal{L}(f)\right) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, f^{-1} est une isométrie puisque pour tout A, B, C, D,

$$< \overrightarrow{f^{-1}(A) f^{-1}(B)}, \overrightarrow{f^{-1}(C) f^{-1}(D)} >=$$
$$< \overrightarrow{f \circ f^{-1}(A) f \circ f^{-1}(B)}, \overrightarrow{f \circ f^{-1}(C) f \circ f^{-1}(D)} >=$$
$$< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} >$$

Les groupe des déplacements et de leurs parties linéaires, les rotations.

Représentation matricielle d'une application affine et de sa partie linéaire dans un repère affine.

Repères affines, orthogonaux, orthonormés. Un repère affine est la donnée d'un triplet de points (O, A, B) non-alignés. La droite (OA) est appellée axe des abscisses, la droite (O, B) axe des ordonnées.
Étant donné un point M du plan, on appelle M'' l'intersection de l'axe des ordonnées avec la paral-

lèle à l'axe des abscisses passant par M, on appelle M' l'intersection de l'axe des abscisses avec la parallèle à l'axe des ordonnées passant par M, avec ces définitions (O, M', M, M'') est un parallélogramme et donc

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''}$$

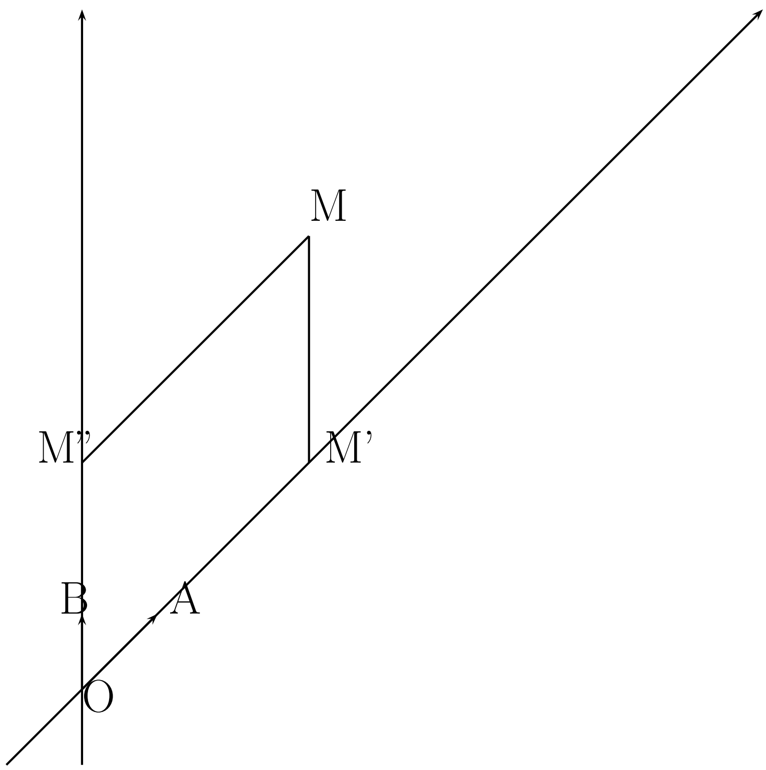
Si on remarque que

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM'} = \dfrac{\overline{OM'}}{\overline{OA}}\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OM''} = \dfrac{\overline{OM''}}{\overline{OB}}\overrightarrow{OB} \end{cases}$$

et que l'on pose

$$\begin{cases} x = \dfrac{\overline{OM'}}{\overline{OA}} \\ y = \dfrac{\overline{OM''}}{\overline{OB}} \end{cases}$$

alors $\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{OA} + y.\overrightarrow{OB}$, x et y sont appelés l'abscisse et l'ordonnée de M (dans le repère affine (O, A, B)) et on peut noter $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Si les droites (OA) et (OB) sont orthogonales alors le repère (O, A, B) est dit orthogonal, si de plus $< \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA} >= 1$ et $< \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB} >= 1$ alors le repère (OAB) est dit orthonormé. On a alors

$$\begin{cases} < \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA} >= x < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA} > +y < \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} >= x \\ < \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB} >= x < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} > +y < \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB} >= y \end{cases}$$

La matrice de la partie linéaire d'une application affine associée à un repère affine. **Définition :** fixons un repère affine (O, A, B), f étant une application affine donnée nous posons

$$\begin{cases} O' = f(O) \\ A' = f(A) \\ B' = f(B) \end{cases}$$

alors il existe un unique quadruplet $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ de nombres réels tels que

$$\begin{cases} \overrightarrow{O'A'} = a_{11}\overrightarrow{OA} + a_{21}\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{O'B'} = a_{12}\overrightarrow{OA} + a_{22}\overrightarrow{OB} \end{cases}$$

Si g est une application linéaire de même partie linéaire que f et que nous posons

$$\begin{cases} O'' = f(O) \\ A'' = f(A) \\ B'' = f(B) \end{cases}$$

alors le quadruplet $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ de réels est tel que

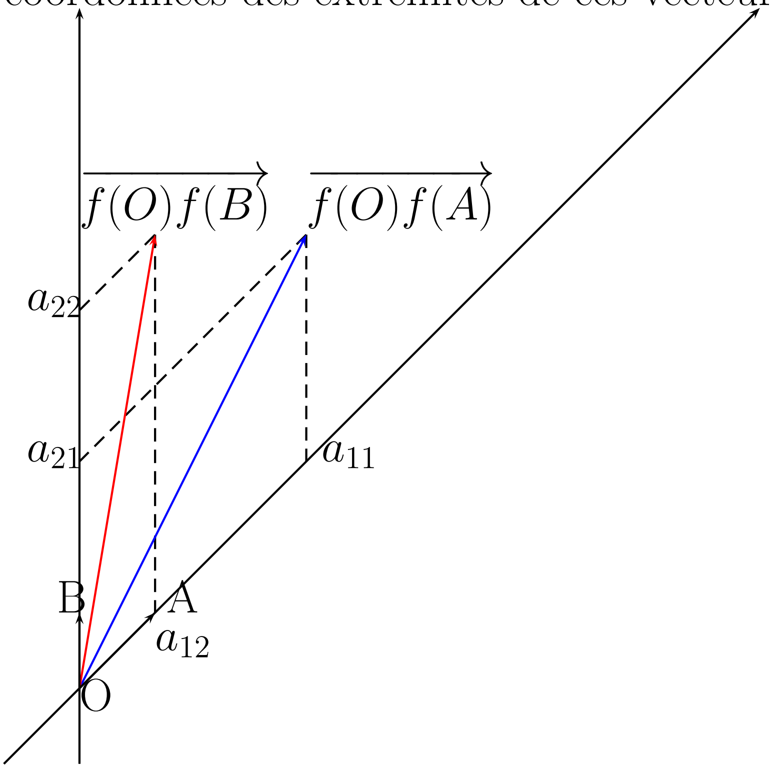
$$\begin{cases} \overrightarrow{O''A''} = a_{11}\overrightarrow{OA} + a_{21}\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{O''B''} = a_{12}\overrightarrow{OA} + a_{22}\overrightarrow{OB} \end{cases}$$

On appelle donc matrice de $\mathcal{L}(f)$ relativement au repère (O, A, B) le tableau de nombres $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Preuve : si f et g ont mêmes parties linéaires alors

$$\begin{aligned} \forall M \ \overrightarrow{f(O)f(M)} &= \mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{OM}\right) = \mathcal{L}(g)\left(\overrightarrow{OM}\right) \\ &= \overrightarrow{g(O)g(M)} \end{aligned}$$

Ceci vaut pour $M = A$ ou $M = B$ et assure l'égalité des matrices définies à partir de g ou à partir de f.
Si on représente $\overrightarrow{f(O), f(A)}$ et $\overrightarrow{f(O), f(B)}$ par les vecteurs d'origine O alors $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ sont les coordonnées des extrémités de ces vecteurs :



La matrice de la partie linéaire d'une isométrie dans un repère orthonormé. Si (O, A, B) est un repère orthonormé alors A et B sont des points du cercle de centre O et rayon 1, les **rayons** (OA) et (OB) sont orthogonaux, comme f isométrie *conserve les distances* *et les produits scalaires*, si

$$\begin{cases} O' = f(O) \\ A' = f(A) \\ B' = f(B) \end{cases}$$

alors A' et B' sont des points du cercle de centre O' et rayon 1, les **rayons** $(O'A')$ et $(O'B')$ sont orthogonaux. Si on représente $\overrightarrow{f(O), f(A)}$ et $\overrightarrow{f(O), f(B)}$ par les vecteurs d'origine O et d'extrémités A^* et B^* alors :

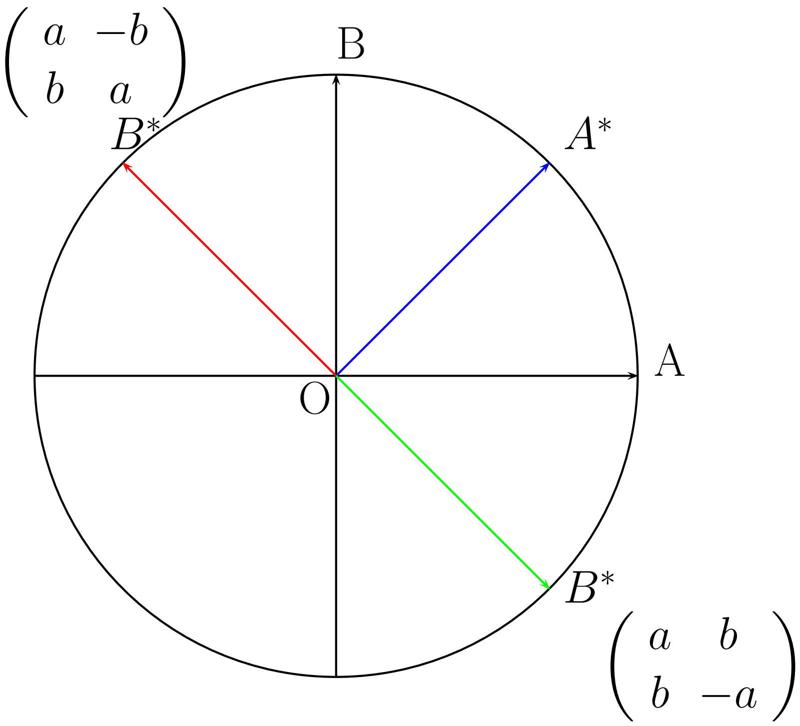
- A^* et B^* sont des points du cercle de centre O et rayon 1.
- Les **rayons** (OA^*) et (OB^*) sont orthogonaux.

Si $\binom{a}{b}$ sont les coordonnés de A^* alors :

$$(OA^*)^2 = 1 = a^2 + b^2$$

La droite orthogonale à (OA^*) et passant par O centre du cercle coupe le cercle en deux points diamétralement opposés B_1 et B_2. Comme $B_1 \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $B_2 \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ sont deux point du cercle diamétralement opposés, car de coordonnées opposées dont la somme des carrés est $a^2 + b^2 = 1$, et car $< \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB_1} >= -ab + ba = 0$ et $< \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB_2} >= ab - ba = 0$.

La matrice d'une isométrie par rapport à un repère orthonormé est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.



Une isométrie affine f du plan a pour partie linéaire une rotation si et seulement si le seul vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\mathcal{L}(f)(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ est $\overrightarrow{0}$. On rapporte le plan à un repère orthonormé (O, A, B), si on pose $\overrightarrow{u} = x.\overrightarrow{OA} + y.\overrightarrow{OB}$ alors

$$\mathcal{L}(f)(\overrightarrow{u}) = x.\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{OA}\right) + y.\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{OB}\right)$$

Soient a et b tels que $a^2 + b^2 = 1$, si la matrice de $\mathcal{L}(f)$ est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ alors

$$\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{u}\right) = (ax - by)\overrightarrow{OA} + (bx + ay)\overrightarrow{OB}$$

et $\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u}$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{lcl} ax - by & = & x \\ bx + ay & = & y \end{array} \right.$$

À ce stade nous distinguons trois cas qui s'excluent

- $a = 1$ (et donc $b = 0$) : la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est la matrice de l'application linéaire identique, dont nous considérons par extension que c'est une rotation linéaire, l'ap -plication affine correspondante est une translation ou l'application identique : ces applications affines seront définies comme partie de l'ensemble des déplacements.

- $a = -1$ (et donc $b = 0$): le système d'équations devient
$$\left\{ \begin{array}{lcl} -x & = & x \\ -y & = & y \end{array} \right.$$
et a pour unique solution $(x, y) = (0, 0)$: l'application linéaire est une rotation ainsi que l'application affine correspondante.

- $|a| < 1$ (et donc $b \neq 0$) : on procède par équivalence en remplaçant la deuxième équation par une combinaison de la deuxième équation multipliée par $b \neq 0$ et de la première multipliée par a, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lll} ax - by & = & x \\ (b^2 + a^2)x & = & ax + by \end{array}\right.$$

soit

$$\left\{\begin{array}{lll} ax - by & = & x \\ ax + by & = & x \end{array}\right.$$

En égalant les deux premiers termes égaux à x il vient $ax - by = ax + by$ soit $2by = 0$ soit $y = 0$ car $b \neq 0$, en reportant $y = 0$ le système précédent devient

$$\left\{\begin{array}{lll} ax & = & x \\ ax & = & x \end{array}\right.$$

qui équivaut à $x = 0$ car $a \neq 1$. $(x, y) = (0, 0)$ est l'unique solution du système de départ. L'application affine et sa partie linéaire sont des rotations.

Si la matrice de $\mathcal{L}(f)$ est $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ alors

$$\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{u}\right) = (ax + by)\overrightarrow{OA} + (bx - ay)\overrightarrow{OB}$$

et $\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u}$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{lll} ax + by & = & x \\ bx - ay & = & y \end{array}\right.$$

soit

$$\begin{cases} (a-1)x+by &= 0 \\ bx-(a+1)y &= 0 \end{cases}$$

Comme $a+1 \neq 0$

$(a-1)x+by = 0 \Leftrightarrow (a+1)(a-1)x+(a+1)by = 0$

mais $(a+1)(a-1) = a^2-1 = -b^2$ donc

$(a-1)x+by = 0 \Leftrightarrow -b^2x+(a+1)by = 0 \Leftrightarrow bx-(a+1)y = 0$

Les deux équations du système d'équations sont équivallentes, le système d'équation est donc équivallent à une seule d'entre elles, par exemple $bx-(a+1)y = 0$, qui est l'équation d'une droite. La partie linéaire de l'isométrie admet une droite comme ensemble de points invariants, l'isométrie affine correspondante est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée.

On peut alors donner une définition matricielle d'un déplacement et d'une rotation vectorielle.

Définition : un déplacement est une isométrie affine dont la matrice de la partie linéaire par rapport à un repère orthonormé est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux nombres réels tels que $a^2+b^2 = 1$.
Une rotation vectorielle est la partie linéaire d'un déplacement.

Exemple : comme $1^2 + 0^2 = 1$ la matrice

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de rotation. Comme c'est la matrice de l'application identique dans tout repère orthonormé, l'application identique est donc une rotation vectorielle, comme l'application identique est la partie linéaire de toute translation : toute translation est un déplacement, et à fortiori une isométrie.

Le produit de deux matrices comme matrice d'une composée de deux applications affines. Soit un repère affine, f et g des applications affines dont les matrices qui représentent leurs parties linéaires sont notées M et N avec $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{21} \\ n_{12} & n_{22} \end{pmatrix}$ l'application affine $f \circ g$ a une partie linéaire représentée, par rapport au repère initial, par une matrice notée P et nous définissons le produit (non commutatif) MN comme étant la matrice P.

Trois propriétés du produit :

- comme l'opération de composition des applications est associative le produit de matrices est associatif.
- Bien qu'une matrice soit relative à un repère, le produit des matrices $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}$

et $N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{21} \\ n_{12} & n_{22} \end{pmatrix}$ **ne dépend que des huits nombres** m_{ij} **et** n_{ij} **ou** $i, j \in \{1, 2\}$.

- L'application affine identique $M \mapsto M$ est le neutre pour la composition des applications, par rapport à tout repère cette application est représentée par la matrice $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, I_2 est le neutre de la multiplication des matrices.

Preuve : Si M, N, P représentent, relativement à un repère, les fonctions affines f, g, h, comme les fonctions affines $f \circ (g \circ h)$ et $(f \circ g) \circ h$ sont égales les matrices $M(PQ)$ et $(MP)Q$ qui les représentent sont égales.
Nous appelons (OAB) le repère affine par rapport auquel les parties linéaires des applications affines f et g sont représentées par les matrices $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{21} \\ n_{12} & n_{22} \end{pmatrix}$, ceci équivaut à $\begin{cases} \mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{OA}\right) & = & m_{11}\overrightarrow{OA} + m_{21}\overrightarrow{OB} \\ \mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{OB}\right) & = & m_{12}\overrightarrow{OA} + m_{22}\overrightarrow{OB} \end{cases}$
et $\begin{cases} \mathcal{L}(g)\left(\overrightarrow{OA}\right) & = & n_{11}\overrightarrow{OA} + n_{21}\overrightarrow{OB} \\ \mathcal{L}(g)\left(\overrightarrow{OB}\right) & = & n_{12}\overrightarrow{OA} + n_{22}\overrightarrow{OB} \end{cases}$, par sub-

stitution dans

$$\begin{cases} \mathcal{L}(g)\left(\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{OA}\right)\right) & = & m_{11}\mathcal{L}(g)\left(\overrightarrow{OA}\right)+m_{21}\mathcal{L}(g)\left(\overrightarrow{OB}\right) \\ \mathcal{L}(g)\left(\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{OB}\right)\right) & = & m_{12}\mathcal{L}(g)\left(\overrightarrow{OA}\right)+m_{22}\mathcal{L}(g)\left(\overrightarrow{OB}\right) \end{cases}$$

On obtient par un calcul reproductible par le lecteur (il s'agit d'appliquer une loi de distributivité)

$$\begin{cases} \mathcal{L}(g)\left(\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{OA}\right)\right) & = & (m_{11}n_{11}+m_{12}n_{21}).\overrightarrow{OA} \\ & & +(m_{21}n_{11}+m_{22}n_{21}).\overrightarrow{OB} \\ \mathcal{L}(g)\left(\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{OB}\right)\right) & = & (m_{11}n_{12}+m_{12}n_{22}).\overrightarrow{OA} \\ & & +(m_{21}n_{12}+m_{22}n_{22}).\overrightarrow{OB} \end{cases}$$

Et on a

$$MN = \begin{pmatrix} m_{11}n_{11}+m_{12}n_{21} & m_{11}n_{12}+m_{12}n_{22} \\ m_{21}n_{11}+m_{22}n_{21} & m_{21}n_{12}+m_{22}n_{22} \end{pmatrix}$$

En remplaçant M ou N par $I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on voit que $PI_2 = I_2P = P$ pour toute matrice P.

Groupe des matrices de déplacements.

Si on a fixé un repère orthonormé (O, A, B) on a appelé déplacements, et rotations vectorielles leurs parties linéaires, les isométries dont la matrice dans ce repère est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2+b^2 = 0$: l'ensemble de ces matrices forment un groupe commutatif.

En effet si $\left\{\begin{array}{rcl} a^2+b^2 &=& 1 \\ a'^2+b'^2 &=& 1 \end{array}\right.$ alors

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'-bb' & -ab'-ba' \\ ab'+ba' & aa'-bb' \end{pmatrix}$$

Si $\left\{\begin{array}{rcl} \alpha &=& aa'-bb' \\ \beta &=& ab'+ba' \end{array}\right.$ alors les valeurs de α et β ne changent pas en permutant (a,b) et (a',b') : le produit est commutatif. De plus

$$\begin{array}{rcl} \alpha^2+\beta^2 &=& a^2a'^2+2aa'bb'+b^2b'^2+a^2b'^2+b^2a'^2-2aa'bb' \\ &=& a^2(a'^2+b'^2)+b^2(a'^2+b'^2) \\ &=& (a^2+b^2)(a'^2+b'^2)=1 \end{array}$$

Le produit de deux matrices de rotation est une matrice de rotation. Si $a=1$ et $b=0$ alors $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = I_2$ qui est le neutre du produit de matrices.

Si $a'=a$ et $b'=-b$ alors $\alpha=a^2+b^2=1$ et $\beta=ab-ba=0$. Une matrice de rotation admet un inverse qui est une matrice de rotation. Les matrices de rotation forment un groupe pour le produit des matrice, les rotations vectorielles et les déplacements sont des groupes pour la composition des applications.

Remarques sur les symétries.

Si f et g sont deux applications affines qui ne sont pas des déplacements alors $f \circ g$ est un déplacement puisque la composition des deux symétries orthogonales $\mathcal{L}(f) \circ \mathcal{L}(g)$ est une rotation.
Dans un repère orthonormé, $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(g)$ ont pour matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & -a' \end{pmatrix}$ où $\begin{cases} a^2 + b^2 & = & 1 \\ a'^2 + b'^2 & = & 1 \end{cases}$
leur produit est

$$\begin{pmatrix} aa' - bb' & -(ab' + ba') \\ ab' + ba' & aa' - bb' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$$

C'est une matrice de rotation comme produit de deux matrices du groupe des rotations, $f \circ g$ est un déplacement, on a de plus l'identité :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & -a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$$

Angles orientés.

Orientation des repères.

Isométries transformant un vecteur donné en un autre.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, comme toute isométrie conserve les produits scalaires il ne peut exister d'isométrie vectorielle transformant $\overrightarrow{u}$ en $\overrightarrow{v}$ que si $u = v$ où la norme u de $\overrightarrow{u}$ est définie par

$u = \sqrt{< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} >}$.
Si $u = v$ alors on se donne un point O et A, C les deux points tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{v}$. Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$ tel que $u = w$ et B tel que $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{w}$, de sorte que $(\frac{1}{u}\overrightarrow{u}, \frac{1}{w}\overrightarrow{w})$ est un système de vecteurs orthonormés. Dans le repère orthonormé $(O, (\frac{1}{u}\overrightarrow{u}, \frac{1}{w}\overrightarrow{w}))$ le vecteur $\overrightarrow{OC}$ a pour coordonnées (a, b) et puisque $u^2 = w^2 = a^2 + b^2$ alors $\frac{1}{OB}\overrightarrow{OB} = \ dfrac1\sqrt{a^2+b^2}(a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{w})$.
Toute rotation de centre O et telle que $\mathcal{R}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ a pour matrice dans le repère $(O, (\frac{1}{u}\overrightarrow{u}, \frac{1}{w}\overrightarrow{w}))$ une matrice dont la première colonne est $\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$.

Il n'existe qu'une seule rotation $\mathcal{R}$ telle que $\mathcal{R}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$, celle dont la matrice dans le repère $(O, (\frac{1}{u}\overrightarrow{u}, \frac{1}{w}\overrightarrow{w}))$ est $\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$.

Isométries transformant un repère orthonormé en un autre, orientation.

Si O, A, B sont trois points avec $\begin{cases} OA = OB = 1 \\ < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} >= 0 \end{cases}$

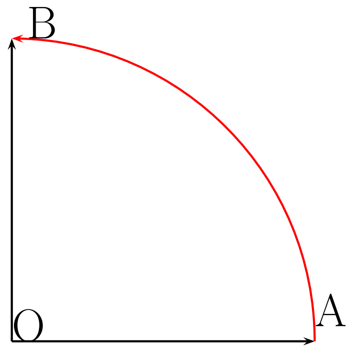
et O, A', B' trois points tels que $\begin{cases} OA' = OB' = 1 \\ < \overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'} >= 0 \end{cases}$

alors nous savons trouver les isométries fixant O et qui transforment A en A', B en B'. En effet si (a, b) avec $a^2 + b^2 = 1$ sont les coordonnées de A' dans le repère (O, A, B) alors B' a pour coordonnées $(b, -a)$ ou $(-b, a)$.

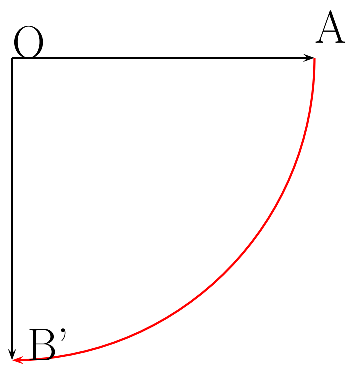
- Si B' a pour coordonnées $(b, -a)$ alors le repère orthonormé (O, A', B') se déduit du repère (O, A, B) par la rotation de matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dans le repère (O, A, B).
- Si B' a pour coordonnées $(-b, a)$ alors le repère orthonormé (O, A', B') se déduit du repère (O, A, B) par la symétrie de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ dans le repère (O, A, B).

Nous retenons que **deux repères orthonormés se déduisent l'un de l'autre par une seule isométrie qui est une symétrie orthogonale ou une rotation.**

On dit que le repère (O, A, B) a même orientation que le repère (O, A', B') s'il existe une rotation $\mathcal{R}$ telle que $\mathcal{R}(O) = O$, $\mathcal{R}(A) = A'$ et $\mathcal{R}(B) = B'$, on remarque qu'alors $\mathcal{R}^{-1}(O) = O$, $\mathcal{R}^{-1}(A') = A$ et $\mathcal{R}^{-1}(B') = B$ où $\mathcal{R}^{-1}$ est une rotation : cette relation est symétrique. Du fait des propriétés de groupe des rotations cette relation est transitive car si on déduit (O, A', B') de (O, A, B) par la rotation $\mathcal{R}$ et (O, A'', B'') de (O, A', B') par la rotation $\mathcal{R}'$ alors on déduit (O, A'', B'') de (O, A, B) par la rotation $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R}$. La classe des repères de même orientation que le repère (O, A, B) est un ensemble de repères qui se déduisent les un des autres par une rotation. On dit qu'un repère n'a pas la même si l'isométrie qui le déduit de (O, A, B) est une symétrie. Étant donnés deux repères (O, A', B') et (O, A'', B'') qui se déduisent de (O, A, B) par les symétries $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ alors (O, A'', B'') se déduit de (O, A', B') par l'isométrie $\mathcal{S}'' \circ \mathcal{S}'^{-1}$ laquelle est une rotation car c'est $\mathcal{S}'' \circ \mathcal{S}'$ puisqu'une symétrie est son propre inverse. En fixant un repère de référence (O, A, B) il n'y a que deux classes d'orientations possibles. On appelle directs les repères de même orientation que (O, A, B) et indirects les autres repères, et on convient que le repère (O, A, B) de la figure suivante est direct.



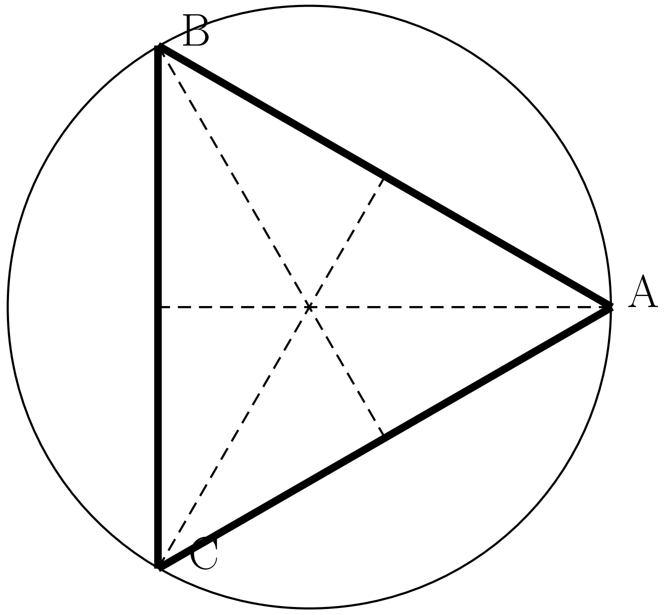
Le repère (O, A, B') qui suit **et qui se déduit de** (O, A, B) **par la symétrie orthogonale d'axe** (O, A) sera, par la convention précédente, indirect.



Actions du groupe des déplacements sur les demi-droites, du groupe des rotations sur les vecteurs unitaires.

Action d'un groupe sur un ensemble.

Présentation d'un exemple nous considérons un triangle équilatéral (A, B, C) alors les médianes, médiatrices et hauteurs du triangles sont confondues et concourantes en un point 0 centre d'un cercle passant par ses sommets. Si on appelle Δ_A, Δ_B, Δ_C les médianes du triangle qui passent par A, B, C. En effet on a



Théorème des médianes : Les médianes d'un triangle sont concourantes.

Preuve : On appelle A', B', C' les milieux de $[B, C]$, $[C, A]$, $[A, B]$. On considère l'application $f \ : \ M \mapsto \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$; Cette application est injective car $f(M) - f(N) = 3.\overrightarrow{MN}$ ne s'annule que si $M = N$. Fixons un point O du plan, alors $f(M) = f(O) + 3.\overrightarrow{MO}$, f injective ne peut s'annuler qu'en en seul point G qui vérifie $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}.f(O)$: cela définit bien un point du plan puisque $O' \neq O$ définit G' tel que $\overrightarrow{O'G'} = \dfrac{1}{3}.f(O')$

et puique

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{G'G} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{O'G'} + \overrightarrow{O'O} \\
&= \frac{1}{3}.(f(O) - f(O')) + \overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'O} \\
&= \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

Puisque A' est milieu de $[B, C]$, $\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{0}$ donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{0} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \\
&= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CA'} \\
&= 2.\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GA}
\end{aligned}$$

La relation $\overrightarrow{0} = 2.\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GA}$ indique que G appartient à la médiane (A, A'), et en utilisant les relations $\begin{cases} \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CB'} \\ \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BC'} \end{cases}$ on aboutit à $\begin{cases} \overrightarrow{0} = 2.\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GB} \\ \overrightarrow{0} = 2.\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GC} \end{cases}$: G appartient aussi à la médiane (B, B') et à la médiane (C, C'), les trois médianes sont concourantes en G. Si de plus le triangle est équilatéral, ses médianes sont des médiatrices et nécessairement aussi ses hauteurs.

Nous cherchons les isométries f qui conservent **dans leurs ensembles** les sommets et les arêtes du triangle.

L'intersection G des médianes étant le seul point tel que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{O}$$

Il suit que

$$\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) = \overrightarrow{f(G)f(A)} + \overrightarrow{fG)f(B)} + \overrightarrow{f(G)f(C)} = \overrightarrow{O}$$

mais en permutant convenablement les termes de la somme, $\overrightarrow{f(G)f(A)} + \overrightarrow{fG)f(B)} + \overrightarrow{f(G)f(C)}$ est $\overrightarrow{f(G)A} + \overrightarrow{fG)B} + \overrightarrow{f(G)C} = \overrightarrow{O}$ et donc $f(G) = G$ par unicité de G centre de gravité du triangle. Un déplacement qui conserve les sommets et arêtes du triangle est une rotation de centre G, une isométrie qui n'est pas un déplacement (un anti-déplacement) est une symétrie orthogonale par rapport à une droite qui passe par G.
Si a est la longueur d'une arête du triangle (A, B, C) alors en choisissant le repère orthonormé $(A', \frac{1}{BC}.\overrightarrow{BC}, \frac{1}{AA'}.\overrightarrow{AA'})$, A, B, C, G ont pour coordonnés $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{pmatrix}$ (par le théorème de pythagore), $\begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{pmatrix}$, il suit que dans le repère linebreak $(G', \frac{1}{BC}.\overrightarrow{BC}, \frac{1}{AA'}.\overrightarrow{AA'})$, A, B, C, G ont pour coordonnés $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6}a \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6}a \end{pmatrix}$, $\binom{0}{0}$.
Soient r_1 et r_2 les rotations de centre G et de matrices $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ alors

$\begin{cases} A \overset{r_1}{\mapsto} B \overset{r_1}{\mapsto} C \overset{r_1}{\mapsto} A \\ A \overset{r_2}{\mapsto} C \overset{r_2}{\mapsto} B \overset{r_2}{\mapsto} A \end{cases}$, r_1 et r_2 conservent dans leur ensemble les sommets (et donc les arêtes) du triangle A, B, C. Réciproquement toute rotation r de centre G qui conservent dans leur ensemble les points A, B, C et qui n'est pas l'identité Id est :

- soit **la** rotation de centre G qui transforme le sommet A en B, c'est à dire r_1.
- Soit **la** rotation de centre G qui transforme le sommet A en C, c'est à dire r_2.

Si s est une symétrie orthogonale qui admet un axe de symétrie qui passe par G et qui conserve dans leur ensemble les points non-alignés A, B et C, alors elle ne fixe pas simultanément A, B, C. L'image de l'un de ces points par cette symétrie n'est pas lui-même : s échange donc au moins deux sommets d'une arête. Comme le milieu d'un point et de son image par une symétrie est invariant par cette symétrie, toute symétrie orthogonale qui conserve le triangle (A, B, C) est d'axe qui passe par G et le milieu d'une arête du triangle, c'est une symétrie orthogonale par rapport à une des médianes du triangle. Inversement toute symétrie orthogonale dont l'axe est une médiane de (A, B, C) conserve le sommet dont elle est is-

sue et échange les deux autres.
Appelons s_A, s_B, s_C les symétries orthogonales d'axes Δ_A, Δ_B, Δ_C alors l'ensemble des isométries qui conservent dans leur ensemble les arêtes et sommets du triangle est l'ensemble d'applications affines $D = \{I, r_1, r_2, s_A, s_B, s_C\}$, lequel, muni de l'opération de composition est un groupe de neutre I. En effet chaque symétrie est son propre inverse et r_1 et r_2 sont mutuellement inverses puisque les produits de leurs matrices valent $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le tableau de composition des applications de D est le suivant

$\circ$	I	r_1	r_2	s_A	s_B	s_C
I	I	r_1	r_2	s_A	s_B	s_C
r_1	r_1	r_2	I	s_C	s_A	s_B
r_2	r_2	I	r_1	s_B	s_C	s_A
s_A	s_A	s_B	s_C	I	r_1	r_2
s_B	s_B	s_C	s_A	r_2	I	r_1
s_C	s_C	s_A	s_B	r_1	r_2	I

Sur **l'ensemble** E_3, à six élements, des triplets de **trois points distincts** pris parmi $\{A, B, C\}$, on définit **une opération externe dont l'opérande est le groupe** D par

$$g.(P_1, P_2, P_3) = (g(P_1), g(P_2), g(P_3))$$

où $g \in D$, g est une isométrie qui conserve le triangle (A, B, C) et $\{P_1, P_2, P_3\} = \{A, B, C\}$. On peut remarquer que :

- si $g = I$, c'est à dire que I est le **neutre** pour l'opération du groupe D (la composition) alors $g.(P_1, P_2, P_3) = (P_1, P_2, P_3)$.
- Si g_1, g_2 sont deux isométries de D alors

$$g_1.\left(g_2.(P_1, P_2, P_3)\right) = (g_1 \circ g_2).(P_1, P_2, P_3)$$

De manière générale on appelle action d'un groupe G sur un ensemble E, une opération externe . : $(g \in G,\ x \in E) \mapsto g.x$ telle que

- si e est le neutre de G alors $e.x = x,\ \forall x \in E$.
- Si $g_1,\ g_2 \in G$, si on note l'opération de G sur g_1 et g_2 par $g_1 g_2$ alors

$$g_1.(g_2.x) = (g_1 g_2).x,\ \forall x \in G$$

Si G est le groupe D des isométries qui conservent le triangle A, B, C alors l'action de D, précédement définie, agit par permutation des sommets A, B, C.

Action du groupe des rotations sur les vecteurs unitaires.

Nous considérons E l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ avec $|\overrightarrow{u}| = 1$ et le groupe G des rotations vectorielles et (l'opération de groupe est la composition des applications) l'opération externe suivante si $\mathcal{R}$

est une rotation et $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire alors

$$\mathcal{R}.\overrightarrow{u} = \mathcal{R}(\overrightarrow{u})$$

On a défini une action du groupe G sur E puisque

$$I.\overrightarrow{u} = I(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1.(\mathcal{R}_2.\overrightarrow{u}) &= \mathcal{R}_1.\mathcal{R}_2(\overrightarrow{u}) = \mathcal{R}_1(\mathcal{R}_2(\overrightarrow{u})) \\ &= \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2(\overrightarrow{u}) = \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2.\overrightarrow{u} \end{aligned}$$

Action du groupe des déplacements sur les demi-droites issues d'un point O.

Une décomposition des déplacements : Étant donné un point O du plan : tout déplacement du plan est de manière unique la composée d'une translation et d'une rotation de centre O.
Preuve : une rotation et une translation sont des déplacements, leur composée est un déplacement. Si f est un déplacement et t la translation de vecteur $\overrightarrow{Of(O)}$ alors : t^{-1} est la translation de vecteur $\overrightarrow{f(O)O}$ et le déplacement $t^{-1} \circ f$ vérifie $t^{-1} \circ f(O) = O$ puisque

$$\overrightarrow{t^{-1} \circ f(O)O} = \overrightarrow{t^{-1} \circ f(O)t^{-1}(f(O))} = \overrightarrow{f(O), f(O)} = \overrightarrow{0}$$

et donc $t^{-1} \circ f$ est une rotation de centre O. Si $f = t \circ r_O = t' \circ r'_O$, où t et t' sont des translations et r_O et r'_O des rotations de centre O alors :

- comme la partie linéaire d'une translation est l'identité, celle de f est à la fois celle de r_O et r'_O. Ces deux rotations sont égales à une rotation r car de même centre O.
- Comme $f = t \circ r = t' \circ r$ on a $t = t' = f \circ r^{-1}$

Étant donnés un point O et une droite D on défini deux sous-ensembles de D, D^+ et D^- par

- $D^+ = \{M \in D / \overline{OM} \geq 0\}$
- $D^- = \{M \in D / \overline{OM} \leq 0\}$

Ces deux sous-ensemble sont les deux demi-droites issues de O et si on fixe un point $A \neq O$ sur D et si f est une isométrie alors

$$\begin{aligned} \overline{f(O)f(M)} \times \overline{f(O)f(A)} &= < \overrightarrow{f(O)f(M)}, \overrightarrow{f(O)f(A)} > \\ &= < \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA} >= \overline{OM} \times \overline{OA} \end{aligned}$$

soit $\overline{f(O)f(M)} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{f(O)f(A)}} \times \overline{OM}$: si M est un point courant de D alors f **affine** transforme D en une droite et pour tout point M de D, f **isométrie** conserve ou inverse le signe de $\overline{OM}$. **L'image d'une demi-droite issue de O par une isométrie f est une demi-droite issue de** $f(O)$.

Définition d'une représentation du groupe

des déplacements : on fixe un repère orthonormé, et en particulier une origine O, tout déplacement f s'écrit alors de manière unique $f = t \circ r$ avec t translation et r rotation de centre O, **On représente alors f par le couple** (t, r) et **on défini le produit** $(t, r).(t', r')$ **comme étant le représentant de** $(t \circ r) \circ (t' \circ r')$, on sait que puisque les déplacements forment un groupe alors qu'on a bien alors une loi de groupe **mais cette loi n'est pas la loi** $(t, r)(t', r') = (t \circ t', r \circ r')$ **qui est la loi dite du produit direct des translations par les rotations de centre O c'est la loi de groupe**

$$(t, r)(t', r') = \big(t \circ (r \circ t' \circ r^{-1}), r \circ r'\big)$$

qui réalise le groupe des déplacements comme produit dit semi-direct des translations par les rotations de centre O.

L'action du groupe des déplacements sur les demi-droites : on se donne un repère orthonormé d'origine O et on identifie le groupe des déplacements au produit semi-direct du groupe des translations (de vecteur d'origine O) par le groupe des rotations de centre O, c'est à dire qu'un déplacement f est représenté par le couple (t, r), avec t la translation de vecteur $\overrightarrow{Of(O)}$ et r une rotation de centre O, l'opération est le produit de composition $(t, r)(t', r') = \big(t \circ (r \circ t' \circ r^{-1}), r \circ r'\big)$.

Si on représente une demi-droite D par un couple $(P, \overrightarrow{u})$ avec $|u| = 1$ alors on défini sur l'ensemble des demi-droite une action du groupe des déplacements représentée par

$$(t, r).(P, \overrightarrow{u}) = (t(P), r(\overrightarrow{u}))$$

.

L'action du groupe des déplacements sur les demi-droites et l'action du groupe des rotations sur les vecteurs unitaires préserv l'orientation.

On peut représenter un repère orthonormé (A, B, C) par la donnée du couple des demi-droites $(D_{A,B}, D_{A,C})$ de sommet A passant par A et passant par B. Si (A', B', C') est un repère orthonormé de même orientation que (A, B, C) alors il existe une rotation r de centre A telle que

$$(I) \begin{cases} \overrightarrow{A'B'} &= \mathcal{L}(r)\left(\overrightarrow{AB}\right) \\ \overrightarrow{A'C'} &= \mathcal{L}(r)\left(\overrightarrow{AC}\right) \end{cases}$$

C'est à dire que $\mathcal{L}(r)$ agit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ par

$$(II) \begin{cases} \overrightarrow{A'B'} &= \mathcal{L}(r).\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{A'C'} &= \mathcal{L}(r).\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

Et comme $(I) \Leftrightarrow (II)$ si la rotation $\mathcal{L}(r)$ agit sur le repère orthonormé (A, B, C) comme en (II) alors (A, B, C) et (A', B', C') ont même orientation.

Si t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ alors

$$(III)\begin{cases} A' &= t\circ r(A)\\ B' &= t\circ r(B)\\ C' &= t\circ r(C)\end{cases}$$

$t\circ r$, dont la partie linéaire est r, agit sur les demi-droites $D_{A,B}$ et $D_{A,C}$ puisque $\begin{cases} A' &= t(A)\\ B' &= t(B)\\ C' &= t(C)\\ \overrightarrow{A'B'} &= r\left(\overrightarrow{AB}\right)\\ \overrightarrow{A'C'} &= r\left(\overrightarrow{AC}\right)\end{cases}$ les deux dernières égalités montrant que les repères (A, B, C) et (A', B', C') ont même orientation.

Les angles orientés comme classe d'équivalence de couples de vecteurs.

Soit O un point du plan et Δ une demi-droite issue de O, on dit qu'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est porté par Δ s'il existe un point M (qui est nécessairement unique) tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.
Soit O un point du plan et Δ une demi-droite issue de O alors il n'existe qu'un seul vecteur unitaire porté par Δ : soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire porté par Δ et M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$ alors $OM = 1$, M est un point de la droite D passant par O et dont une demi-droite et Δ c'est aussi un point du

cercle de centre O et de rayon 1. L'intersection d'un cercle et d'une droite passant par son centre est constituée de deux points dont le premier est M, le second M' et O est le milieu de $[M, M']$, il suit que $\overline{OM'} = -\overline{OM}$ et M' n'appartient pas à Δ puisque $\overline{OM'}$ est de **signe opposé** à celui de $\overline{OM}$, il n'y a sur Δ qu'un seul point M tel que $OM = 1$, il n'y a donc qu'un seul vecteur unitaire porté par Δ.

Pour définir l'angle entre deux vecteurs unitaires on va avoir recours à la rotation vectorielle qui transforme le premier vecteur unitaire en le second, pour égaler ou comparer des angles entre un premier couple de vecteur et un second nous comparerons ou égalerons les rotations vectorielles qui transforment les premiers vecteurs de chaque couple en les seconds. Comme, géométriquement, un ensemble de rotations vectorielles peut être assimilé à l'ensemble des parties linéaires d'un ensemble de rotations affines qui fixent un point O donné, on définira, en fixant un point O du plan, l'angle de deux demi-droites issues de O comme l'angle des deux vecteurs unitaires qui leur sont associés.

Se donner une relation sur un ensemble E, c'est se donner une application R de l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in E$ (cet ensemble est $E \times E$) vers l'ensemble $\{0, 1\}$ et l'équivalence qui sert de définition

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow R(x, y) = 1$$

Un exemple : si $E = \mathbb{Z}$ et que $R(p, q) = 1$ si et seulement si $p - q$ est un multiple de 3 alors $p\mathcal{R}q$ si et seulement si $p - q$ est un multiple de 3 définit une relation. Comme ni $3 - 2$ ni $2 - 3$ ne divisent 3, on voit que pour une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E et deux éléments $x, y \in E$, ni $x\mathcal{R}y$ ni $y\mathcal{R}x$ n'ont nécessairement lieu.
Parmi les relations pouvant exister sur un ensemble on s'intéresse à trois propriétés :

- (i) Réflexivité : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$.
- (ii) Transitivité : $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow y\mathcal{R}z$.
- (iii) Symétrie : $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

Si $\mathcal{R}$ vérifie ces trois propriétés alors on dit que c'est une relation d'équivalence.
Si $E = \mathbb{Z}$ alors la relation $p\mathcal{R}q$ si et seulement si $p - q$ est un multiple de 3 définit une relation d'équivalence puisque :

- $\forall x \in \mathbb{Z}\ x - x = 0 = 3$ donc $x\mathcal{R}x$.
- Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x-z = (x-y)+(y-z)$ est un multiple de 3 comme somme de multiples de 3.
- Si $x\mathcal{R}y$ alors $x - y$ est un multiple de 3, son opposé $y - x$ est aussi un multiple de 3, donc $y\mathcal{R}x$.

Si $x \in E$ alors on appelle la classe d'équivalence de x, on la note $\overline{x}$, l'ensemble, non vide car il contient x, des $y \in E$ tels que $y\mathcal{R}x$.
Par transitivité si $y \in \overline{x}$ alors $\overline{x} = \overline{y}$, de sorte que deux classes d'équivalentes sont soit égales soit disjointes et comme tout x de E appart ient à $\overline{x}$, l'union disjointe des classes de E est E : **on dit que l'ensemble des classes d'équivalence forme une partition de E, l'ensemble des classes d'équivalence est noté** $E/\mathcal{R}$.

Actions du groupes des rotations sur les couples de vecteurs unitaires, du groupe des déplacements sur les couples de demi-droites.

Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $|u| = |v| = 1$ alors il existe une seule rotation -on la note $R(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$- telle que $R(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$.
La relation $\sim$ définie sur l'ensemble des couples de vecteurs unitaires par

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \sim (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}) \Leftrightarrow R(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = R(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{t})$$

est une relation d'équivalence, on appelle l'angle orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et on le note $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ la classe d'équivalence de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. L'égalité $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}})$ équivaut à dire que par l'action de la même rotation R on a $\left\{\begin{array}{lll}\overrightarrow{v} & = & R.\overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{t} & = & R.\overrightarrow{w}\end{array}\right.$ ceci équivaut à écrire que le couple $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{t})$ est l'image du couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ par l'action d'une rotation R'.

Preuve : il existe une seule rotation R' telle que $\overrightarrow{w} = R'(\overrightarrow{u}) = R'.\overrightarrow{u}$, il suit de $\left\{\begin{array}{lll}\overrightarrow{v} & = & R.\overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{t} & = & R.\overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{w} & = & R'.\overrightarrow{u}\end{array}\right.$ que

$$\overrightarrow{t} = R.R'.R^{-1}.\overrightarrow{v} = R'.\overrightarrow{v}$$

On définit alors une action du groupe des rotations sur les couples de vecteurs unitaires par

$$R'.(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \overset{def}{=} (R'.\overrightarrow{u}, R'.\overrightarrow{v})$$

Soit (Δ_1, Δ_2) un couple de demi-droites alors il n'existe qu'un déplacement f tel que $f(\Delta_1) = \Delta_2$:

Preuve : appelons O_1 et O_2 les sommets de Δ_1 et Δ_2, si $f(\Delta_1) = \Delta_2$ alors, d'après ce qui précède, $f(O_1) = O_2$ et $f = t \circ r$ où t est la translation de vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$ et r une rotation de centre O_1 de partie linéaire $\mathcal{L}(r)$. Si M_1 est l'unique point de Δ_1 tel que $O_1M_1 = 1$ alors $f(M_1) = M_2 \in \Delta_2$

est l'unique point de Δ_2 tel que $OM_2 = 1$ puisque $|\mathcal{L}(r)\left(\overrightarrow{O_1M_1}\right)| = |\overrightarrow{O_2M_2}| = 1$. Ceci détermine uniquement r et donc f.
Par la suite on note f_{D_1,D_2} le déplacement f tel que $f(D_1) = D_2$.
La relation $\sim$ définie sur l'ensemble des couples de demi-droites par

$$(\Delta_1, \Delta_2) \sim (D_1, D_2) \Leftrightarrow \mathcal{L}\left(f_{D_1,D_2}\right) = \mathcal{L}\left(f_{\Delta_1,\Delta_2}\right)$$

est une relation d'équivalence, on appelle angle orienté entre D_1 et D_2, noté $(\widehat{D_1, D_2})$, la classe d'équivalence de (D_1, D_2).
Si $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ est l'angle orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ vecteurs unitaires de D_1 et D_2 et $(\widehat{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}})$ est l'angle orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ vecteurs unitaires de D_1 et D_2 alors

$$(\Delta_1, \Delta_2) \sim (D_1, D_2) \Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}})$$

L'égalité $(\widehat{D_1, D_2}) = (\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$ équivaut à dire que par l'action de deux déplacements f et g de même parties linéaires, on a $\begin{cases} \Delta_2 &= f.\Delta_1 \\ D_2 &= g.D_1 \end{cases}$ ceci équivaut à écrire que $\Delta_2 = f'.\Delta_1$ et $D_1 = g'.D_2$ où f' et g' sont deux déplacements de même partie linéaire.
Preuve : si $(\widehat{D_1, D_2}) = (\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$ alors $(\Delta_1, \Delta_2) \sim (D_1, D_2)$ et donc $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}})$ où $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{t}$ sont les vecteurs unitaires directeurs de Δ_1, Δ_2, D_1, D_2. Il existe donc une

rotation vectorielle r' telle que $\left\{\begin{array}{lcl}\overrightarrow{v} & = & r'.\overrightarrow{u}\\ \overrightarrow{t} & = & r'.\overrightarrow{w}\end{array}\right.$. Δ_2 et D_2 sont donc les images respectives de Δ_1 et D_1 par deux déplacements de même partie linéaire r'.

Où les angles forment un groupe.

Comment additionner deux angles.

La somme des angles de deux vecteurs unitaires. **On appelle θ l'application qui à tout couple de vecteurs $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ associe la partie linéaire $\mathcal{L}\left(R(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\right)$ de la rotation $R(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ telle que $R(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{v}$, θ est surjective et $\theta(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\theta(\overrightarrow{w},\overrightarrow{t})$ si et seulement si $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})=(\widehat{\overrightarrow{w},\overrightarrow{t}})$.**

Si R est la partie linéaire d'une rotation, $\overrightarrow{u}$ est un vecteur alors $\theta\left(u,R(\overrightarrow{u})\right)=R$. D'autre part $\theta(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\theta(\overrightarrow{w},\overrightarrow{t})\Leftrightarrow R(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=R(\overrightarrow{w},\overrightarrow{t})\Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})=(\widehat{\overrightarrow{w},\overrightarrow{t}})$.

L'application $\overline{\theta}$ qui à l'angle $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ associe $\mathcal{L}\left(R(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\right)=\theta\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ est bien définie puisque, si $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})=(\widehat{\overrightarrow{w},\overrightarrow{t}})$ alors $\theta(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\theta(\overrightarrow{w},\overrightarrow{t})$, cette application est bijective.

En effet, si R est la partie linéaire d'une rotation, $\overrightarrow{u}$ un vecteur, alors $\left(\widehat{\overrightarrow{u},R(\overrightarrow{u})}\right)$ est un antécédent de R. Il est unique puisque, si

$\mathcal{L}\left(R(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\right) = \mathcal{L}\left(R(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{t})\right)$ alors $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}})$.

On définit alors une addition sur les angles par :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}}\right) = (\overline{\theta})^{-1}\left(\overline{\theta}\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}}\right)\circ\overline{\theta}\left(\widehat{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}}\right)\right)$$

Comme l'ensemble des rotations est un groupe commutatif pour la composition, l'ensemble des angles est un groupe commutatif pour cette addition.
Cela se déduit de cette **propriété de transport de structure** : si $\overline{\theta}$ est une bijection d'un ensemble E vers un groupe G, alors E est groupe pour l'opération $x.y = (\overline{\theta})^{-1}\left(\overline{\theta}(x).\overline{\theta}(y)\right)$. Son neutre est $(\overline{\theta})^{-1}(e)$ où e est le neutre de G. E est commutatif si et seulement si G est commutatif.

Preuve : Les propriétés d'associativité ou de commutativité de l'opération de E se déduisent formellement de l'associativité ou de la commutativité de l'opération de G et en utilisant la définition de l'opération sur E, si $1_G \in G$ est le neutre de G et $g^{-1} \in G$ désigne l'inverse de $g \in G$, alors $(\overline{\theta})^{-1}(1_G)$ est le neutre de E et $(\overline{\theta})^{-1}\left(\overline{\theta}(x)^{-1}\right)$ est l'inverse de $x \in E$.

Inverse d'un angle, relation de Chasles. Quand l'ensemble E est l'ensemble des angles, c'est à dire quand $\overline{\theta}\ :\ \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \mapsto R(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

De $\left\{\begin{array}{lcl} (R(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))^{-1} & = & R(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) \\ R(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \circ R(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) & = & R(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) \end{array}\right.$ on déduit

$$\boxed{\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}}\right) = \widehat{0} \stackrel{déf}{=} \left(\widehat{\overrightarrow{t}, \overrightarrow{t}}\right)\ \forall \overrightarrow{t}}$$

$$\boxed{\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}}\right)\ (Relation\ de\ Chasles)}$$

Quatre angles remarquables. **Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire et $\sim$ la relation qui définit les angles comme classe de couples de vecteurs unitaires, alors on appelle angle nul, noté $\widehat{O}$ la classe du couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})$, angle plat, noté $\widehat{p}$, la classe du couple $(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{u})$. Pour tout vecteur unitaire $\overrightarrow{v}$, $\widehat{0}$ est la classe de $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$ et $\widehat{p}$ est la classe de $(\overrightarrow{v}, -\overrightarrow{v})$.**

En effet les applications $Id\ :\ \overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{v}$ et $-Id\ :\ \overrightarrow{v} \mapsto -\overrightarrow{v}$ sont des rotations et pour tout vecteur unitaire $\overrightarrow{v}$: $\left\{\begin{array}{lcl} \overrightarrow{v} & = & Id(\overrightarrow{v}) \\ -\overrightarrow{v} & = & -Id(\overrightarrow{v}) \end{array}\right.$.

Si on remarque que $\left(\widehat{\overrightarrow{-v}, \overrightarrow{v}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{-v}}\right) = \widehat{p}$ alors la relation de Chasles

$$\boxed{\left(\widehat{\overrightarrow{v}, -\overrightarrow{v}}\right) + \left(\widehat{-\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}}\right)}$$

devient $\boxed{\widehat{p}+\widehat{p}=\widehat{0}}$

Supposons fixée une orientation du plan, si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire alors nous définissons $\overrightarrow{v^+}$ et $\overrightarrow{v^-}$ de la manière suivante : on se donne O un point et A le point du plan tel que $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{v}$ alors la droite perpendiculaire à (OA) coupe le cercle de centre O et de rayon 1 en deux points B^+ et B^- diamétralement opposés, **où B^+ est celui des deux points tel que le repère (O,A,B^+) est direct** . Les vecteurs unitaires opposés $\overrightarrow{v^+}=\overrightarrow{OB^+}$ et $\overrightarrow{v^-}=\overrightarrow{OB^-}$ et sont orthogonaux à $\overrightarrow{u}$. Réciproquement si $\overrightarrow{v}$ est un vecteur unitaire, alors le point M tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{v}$ est un point du cercle de centre O de rayon 1 et les droites (OM) et (OA) sont orthogonales donc M est égal à B^+ ou B^- et $\overrightarrow{v}$ est égal à $\overrightarrow{v^+}$ ou $\overrightarrow{v^-}$. Comme le repère (O,B,B^+) est toujours direct si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs unitaires alors il existe une rotation r telle que $\left\{\begin{array}{lll}\overrightarrow{v} & = & r\left(\overrightarrow{u}\right)\\ \overrightarrow{v^+} & = & r\left(\overrightarrow{u^+}\right)\end{array}\right.$ en prenant l'opposé de la deuxième égalité on aussi $\left\{\begin{array}{lll}\overrightarrow{v} & = & r\left(\overrightarrow{u}\right)\\ \overrightarrow{v^-} & = & r\left(\overrightarrow{u^-}\right)\end{array}\right.$. **Il suit que les angles $\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{u^+}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{u^-}}\right)$ ne dépendent pas de $\overrightarrow{u}$, on appelle d^+ et d^- ces angles.**

La relation $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u^+}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{u^+}, \overrightarrow{u}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}}\right)$ devient $d^+ + \left(\widehat{\overrightarrow{u^+}, \overrightarrow{u}}\right) = \widehat{0}$ et comme les couples $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u^+}\right)$ et $\left(\overrightarrow{u^+}, \overrightarrow{u}\right)$ sont d'orientation inverse on a $\left(\widehat{\overrightarrow{u^+}, \overrightarrow{u}}\right) = d^-$ et donc

$$\boxed{d^+ + d^- = \widehat{0}}$$

Les relations $\begin{cases} \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u^+}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{u^+}, -\overrightarrow{u}}\right) & = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{u}}\right) \\ \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u^-}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{u^-}, -\overrightarrow{u}}\right) & = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{u}}\right) \end{cases}$

deviennent $\begin{cases} d^+ + \left(\widehat{\overrightarrow{u^+}, -\overrightarrow{u}}\right) & = \widehat{p} \\ d^- + \left(\widehat{\overrightarrow{u^-}, -\overrightarrow{u}}\right) & = \widehat{p} \end{cases}$. Par action de la rotation $-Id$ sur les couples $\left(\overrightarrow{u^+}, -\overrightarrow{u}\right)$ et $\left(\overrightarrow{u^+}, -\overrightarrow{u}\right)$ on a $\begin{cases} \left(\widehat{\overrightarrow{u^+}, -\overrightarrow{u}}\right) & = \left(\widehat{\overrightarrow{u^-}, \overrightarrow{u}}\right) = d^+ \\ \left(\widehat{\overrightarrow{u^-}, -\overrightarrow{u}}\right) & = \left(\widehat{\overrightarrow{u^+}, \overrightarrow{u}}\right) = d^- \end{cases}$

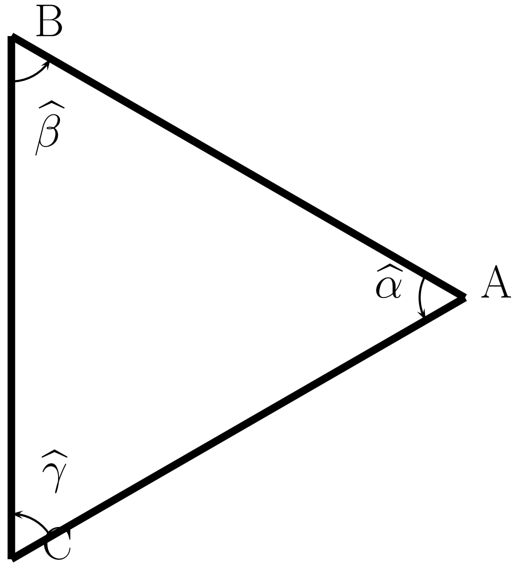
et finalement

$$\boxed{\begin{cases} d^+ + d^+ = \widehat{p} \\ d^- + d^- = \widehat{p} \end{cases}}$$

Somme des angles d'un triangle. Soient A, B, C trois points deux à deux distincts alors

$$\boxed{\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) = \widehat{p}}$$

Ceci s'interprète sur la figure suivante



$$\boxed{\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} = \widehat{p}}$$

Preuve : Comme l'angle de deux vecteur est **une classe d'équivalence de l'action du groupe des rotations sur l'ensemble des couples de vecteurs** on en déduit que pour toute rotation R, $\left(\widehat{R.\overrightarrow{u}, R.\overrightarrow{v}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$ et en particulier si $R = -Id$ alors $\left(\widehat{-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$.

Posons $\widehat{\delta} = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right)$

alors

$$\begin{aligned}\widehat{\delta} &= \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}}\right)\\ &= \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}}\right)\\ &= \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}}\right)=\widehat{p}\end{aligned}$$

Fonctions trigonométriques sur le groupe des angles.

Représentations matricielles d'une application linéaire.

Matrice de passage d'un changement de repère comme représentation d'une application linéaire bijective. **Soient (O, A, B) et (O', A', B') deux repères affines alors il n'existe qu'une application affine telle que** $\left\{\begin{array}{lcl} O' &=& f(O)\\ A' &=& f(A)\\ B' &=& f(B)\end{array}\right.$ **. Cette application affine est de plus bijective.**

Preuve : comme (O, A, B) est un repère affine il existe quatre nombres réels $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ de nombres réels tels que

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{O'A'}=a_{11}\overrightarrow{OA}+a_{21}\overrightarrow{OB}\\ \overrightarrow{O'B'}=a_{12}\overrightarrow{OA}+a_{22}\overrightarrow{OB}\end{array}\right.$$

Soit f l'application telle que $f(O) = O'$ et dont la partie linéaire dont la matrice, par rapport au repère (O, A, B), est $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, alors par définition des matrices l'application affine f est telle que $\left\{\begin{array}{lcl} O' & = & f(O) \\ A' & = & f(A) \\ B' & = & f(B) \end{array}\right.$.

Soit à présent g une application linéaire telle que $\left\{\begin{array}{lcl} O' & = & g(O) \\ A' & = & g(A) \\ B' & = & g(B) \end{array}\right.$ alors, par rapport au repère (O, A, B), g a même matrice que f c'est à dire même partie linéaire, mais comme $f(O) = g(O)(= O')$ c'est que $f = g$: en effet pour toute application affine f on a la relation $\forall M$, $\overrightarrow{Of(M)} = \overrightarrow{Of(O)} + \mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{OM}\right)$.

Si f n'est pas bijective alors on peut trouver $x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ avec $\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0}$. Si $x = 0$ alors $\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{u}\right) = y.\overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{0}$ et comme $y \neq 0$ il suit que $O' = B'$ ce qui contredit que (O', A', B') est un repère affine. Si $y = 0$ alors $O' = A'$ ce qui contredit que (O', A', B') est un repère affine. Si x et y sont non nuls alors

$$\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow x\overrightarrow{O'A'} + y\overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{0}$$

Ceci équivaut à $\overrightarrow{O'B'} = -\dfrac{x}{y}\overrightarrow{O'A'}$: O', A' et B' sont alignés et (O', A', B') ne peut pas être un repère affine, ce qui est contradictoire.

Soient $\mathcal{R} = (O, A, B)$ et $\mathcal{R}' = (O', A', B')$ deux repères affines, on appelle matrice

de passage de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$, on la note $P_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}$ la matrice, relativement à $\mathcal{R}$, de l'unique application affine f telle que $\left\{\begin{array}{lcl} O' & = & f(O) \\ A' & = & f(A) \\ B' & = & f(B) \end{array}\right.$

Matrices d'une application linéaire. **Définition : dans un repère $\mathcal{R} = (O, A, B)$, M on dit que M est de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ si (x, y) sont les uniques nombres réels tels que $\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{OA} + y.\overrightarrow{OB}$, on dira aussi que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont les coefficients de $\overrightarrow{v}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ égal à $\overrightarrow{OM}$.**

Soit f une application linéaire, $\mathcal{R} = (O, A, B)$ et $\mathcal{R}' = (O', A', B')$ deux repères affines, on appelle matrice de f de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$, on la note $M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}')$, la matrice dont la première (deuxième) colonne est celle des coefficients de $\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{OA}\right)$ ($\mathcal{L}(f)\left(\overrightarrow{OB}\right)$) comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{O'A'}$ et $\overrightarrow{O'B'}$.

Si f est une application affine $\mathcal{R}$ est le repère (O, A, B) alors $f(\mathcal{R})$ est le repère $(f(O), f(A), f(B))$ et des définitions qui précèdent il suit que

$$\boxed{M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}) = P(\mathcal{R}, f(\mathcal{R}))}$$

Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont deux repères, Id est l'application affine : $M \mapsto M$ alors

$$\boxed{M\left(Id, \mathcal{R}', \mathcal{R}\right) = P\left(\mathcal{R}, \mathcal{R}'\right)}$$

Formules de changement de repère. **Si $\mathcal{R}$ est un repère affine, on défini une opération . dont l'opérande de gauche est une matrice et celle de droite ≪un vecteur coordonnées :$\binom{x}{y}$≫par $M\left(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}\right) . \binom{x}{y}$ sont les coordonnées de $f(N)$ où N est un point de coordonnées $\binom{x}{y}$ dans $\mathcal{R}$.**

Si $M\left(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, un calcul montre que :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

Nous définissons alors le produit algébrique $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} . \binom{x}{y}$ par $\binom{a_{11}x+a_{12}y}{a_{21}x+a_{22}y}$
Nous définissions alors le produit algébrique des matrices $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ comme la matrice dont les ≪vecteurs colonne≫respectifs sont $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} . \binom{b_{11}}{b_{21}}$ et $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} . \binom{b_{12}}{b_{22}}$

Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont deux repères et f une application affine alors on a la formule

$$\boxed{P(\mathcal{R},\mathcal{R}').M(f,\mathcal{R}',\mathcal{R}') = M(f,\mathcal{R},\mathcal{R}).P(\mathcal{R},\mathcal{R}')}$$

Preuve si $\binom{x}{y}$ et $\binom{x'}{y'}$ sont les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$ alors $P(\mathcal{R},\mathcal{R}')\binom{x'}{y'} = M(Id,\mathcal{R}',\mathcal{R}).\binom{x'}{y'}$ est par définition de $M(Id,\mathcal{R}',\mathcal{R}).\binom{x}{y}$ le vecteur coordonées de M dans le repère R' soit $\binom{x'}{y'}$
Posons $\mathcal{R} = (O,A,B)$ et $\mathcal{R}' = (O',A',B')$ alors $P(\mathcal{R},\mathcal{R}').M(f,\mathcal{R}',\mathcal{R}')$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $f\left(\overrightarrow{O'A'}\right)$ et $f\left(\overrightarrow{O'B'}\right)$ dans le repère $\mathcal{R}$. Les colonnes de $M(f,\mathcal{R},\mathcal{R}).P(\mathcal{R},\mathcal{R}')$ sont celles des deux produits $M(f,\mathcal{R},\mathcal{R}).\binom{x_i}{y_i}$, $\binom{x_i}{y_i}$ étant les coordonn 'ees de $\overrightarrow{O'A'}$ et $\overrightarrow{O'B'}$, ces produits sont donc les coordonnées de $f\left(\overrightarrow{O'A'}\right)$ et $f\left(\overrightarrow{O'B'}\right)$ dans le repère $\mathcal{R}$ et les deux matrices sont égales.

Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux repères affines, la matrice $P(\mathcal{R},\mathcal{R}')$ est inversible d'inverse $P(\mathcal{R}',\mathcal{R}')$.
Les règles de calcul du produit de matrices montrent que $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un neutre pour le produit. Considérons le produit $P(\mathcal{R},\mathcal{R}').P(\mathcal{R}',\mathcal{R})$: les colonne de $P(\mathcal{R}',\mathcal{R})$

représentent les coordonnées de $\overrightarrow{O'A'}$ et $\overrightarrow{O'B'}$ dans le repère $\mathcal{R}$, le produit $P(\mathcal{R},\mathcal{R}').P(\mathcal{R}',\mathcal{R})$ a pour colonnes les produits de $P(\mathcal{R},\mathcal{R}')$ par les coordonnées de $\overrightarrow{O'A'}$ et $\overrightarrow{O'B'}$ dans le repère $\mathcal{R}$; ce sont les coordonnées de $\overrightarrow{O'A'}$ et $\overrightarrow{O'B'}$ dans le repère $\mathcal{R}'$. Ce qui revient à écrire que ce produit de matrice est I_2. En permutant $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ et par le même raisonnement, le produit $P(\mathcal{R}',\mathcal{R}).P(\mathcal{R},\mathcal{R}')$ est I_2, et la propriété est démontrée.
Par cette propriété la formule

$$\boxed{P(\mathcal{R},\mathcal{R}').M(f,\mathcal{R}',\mathcal{R}') = M(f,\mathcal{R},\mathcal{R}).P(\mathcal{R},\mathcal{R}')}$$

devient

$$\boxed{M(f,\mathcal{R}',\mathcal{R}') = P(\mathcal{R},\mathcal{R}')^{-1}.M(f,\mathcal{R},\mathcal{R}).P(\mathcal{R},\mathcal{R}')}$$

La représentation matricielle des angles ne dépend pas des repères de même orientation.

Se donner un angle de deux vecteurs (de deux demi-droites), c'est se donner une unique rotation linéaire qui associe au premier vecteur le deuxième (comme partie linéaire de l'unique déplacement qui associe à la première demi-droite la seconde). **Toute matrice de cette rotation dépend du choix du repère dans laquelle elle s'exprime mais ne dépend de tout repère de tout ensemble de repères orthonormés de même orientation.**

Preuve : soit E un ensemble de repères orthonormés, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux repères orthonormés par rapport auxquels une rotation r a pour matrices $M(r, \mathcal{R}, \mathcal{R})$ et $M(r, \mathcal{R}', \mathcal{R}')$. Soit $P(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$ la matrice de passage de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ est aussi la matrice par rapport à $\mathcal{R}$ de l'unique application affine f telle que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$. Or f est un déplacement car les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont orthonormés de même orientation. Dans la relation

$$M(r, \mathcal{R}', \mathcal{R}') = P(\mathcal{R}, \mathcal{R}')^{-1} .M(r, \mathcal{R}, \mathcal{R}) .P(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$$

toutes les matrices appartiennent au **groupe commutatif** des matrices sous la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$. On a donc $M(r, \mathcal{R}', \mathcal{R}') = P(\mathcal{R}, \mathcal{R}')^{-1} .P(\mathcal{R}, \mathcal{R}') .M(r, \mathcal{R}, \mathcal{R}) = M(r, \mathcal{R}, \mathcal{R})$. On en déduit que : **la matrice d'une rotation linéaire par rapport à un repère orthonormé ne dépend que de sa classe d'orientation.**

On peut donner alors **ces définitions du cosinus et du sinus formels d'un angle** : étant donné un angle $\widehat{\alpha}$, l'unique rotation r telle que $r(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ pour tout $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ unitaires tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = \widehat{\alpha}$ admet même matrice dans toute classe de repères de même orientation. Cette matrice s'écrit $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$, pour

chacune des deux classe d'orientation on appelle cosinus abstrait de $\widehat{\alpha}$ le nombre réel a et sinus abstrait de $\widehat{\alpha}$ le nombre réel b et on peut poser, **après le choix d'une orientation** $a = Cos\left(\widehat{\alpha}\right)$ et $b = Sin\left(\widehat{\alpha}\right)$.
Les relations entre a et b et la règle de calcul du produit de deux matrices donnent alors pour tout angles $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ les propriétés :

$$Cos\left(\widehat{\alpha}\right)^2 + Sin\left(\widehat{\alpha}\right)^2 = 1$$

$$Cos\left(\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}\right) = Cos\left(\widehat{\alpha}\right)Cos\left(\widehat{\beta}\right) - Sin\left(\widehat{\alpha}\right)Sin\left(\widehat{\beta}\right)$$

$$Sin\left(\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}\right) = Cos\left(\widehat{\alpha}\right)Sin\left(\widehat{\beta}\right) + Sin\left(\widehat{\alpha}\right)Cos\left(\widehat{\beta}\right)$$

12 Février 2011