Une preuve de la relation de Pythagore

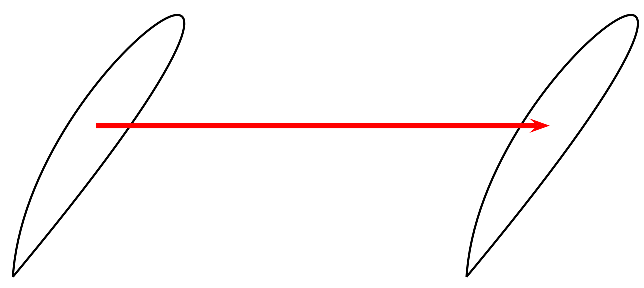
Alain Wazner. Pour Hélène et Léo

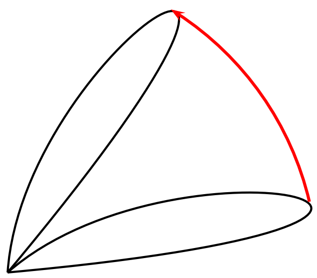
0.1 Avant de mesurer des surfaces

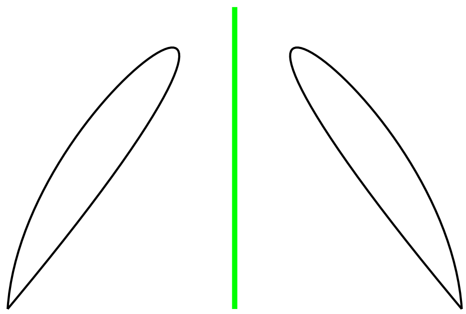
0.1.1 Généralités

Dans les anciens livres de classe, on peut trouver des formulaires qui donnent la surface de parties du plan telles que triangles, rectangles, ellipses ou cercles. Plus généralement pour tenter de mesurer une partie S du plan on peut recourir à l'expérience physique suivante : Si la surface de cette partie A de papier homogène est d'épaisseur constante, alors la quantité de matière, et donc la masse de la matière qui recouvre A est proportionnelle à son volume (une matière homogène est de densité constante) et donc à sa surface (puisque la matière recouvrante est d'épaisseur constante). On peut alors faire deux constatations :

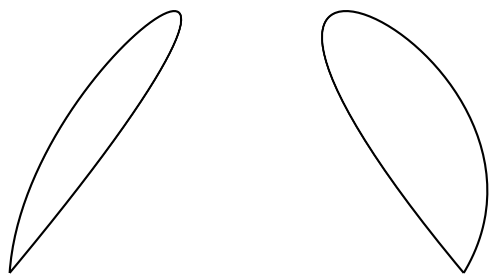
- On ne change pas la surface d'une partie A par translation ou rotation (déplacements), symétrie orthogonale (pliage). Figures ci-dessous :

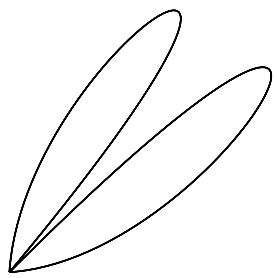


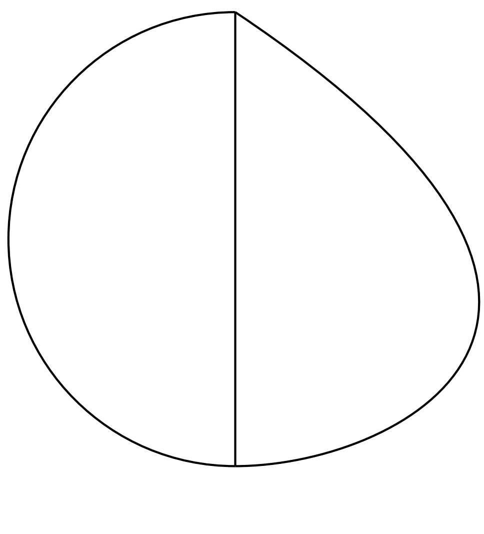




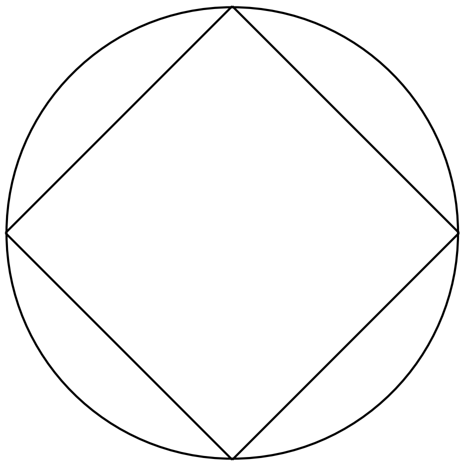
– Si les parties A et B sont disjointes, ou si leur intersection est réduite à un point ou une ligne, alors l'aire de $A \cup B$ ($\cup$ = union) est la somme des aires de A et B (voir figure ci-dessous) :





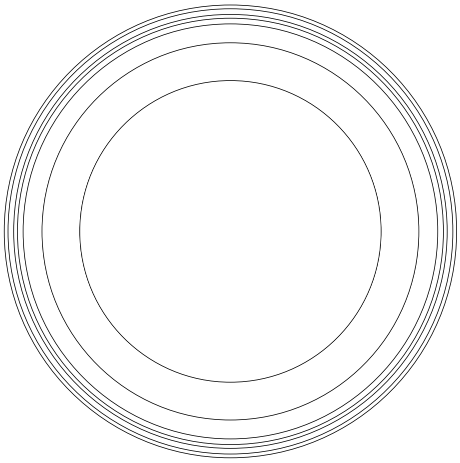


– Si $A \subset B$ (A inclus dans B) alors l'aire de A est inférieure ou égale à celle de B.



– A ces axiomes il convient d'en rajouter un, qui tient compte des propriétés de densité des nombres rationnels dans l'ensemble des nombres réels, et sans lequel on ne peut établir que la surface d'un rectangle dont les longueurs des cotés sont a et b, nombres **réels**, est $a \times b$. Si A_n est une suite croissante de parties
.

du plan (telle que $A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$), si la suite croissante $\mathcal{A}(A_n)$ a une limite finie $\mathcal{A}$ alors l'aire de $A = \cup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est $\mathcal{A}$.

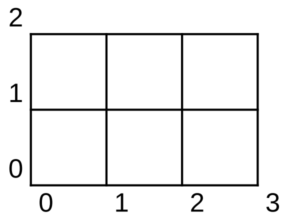


– Cet axiome sert a fixer une unité de mesure pour les aires : l'aire d'un carré dont la longueur d'un coté est 1 mesure 1.

0.1.2 Le cas particulier des rectangles

On peut déduire des axiomes qui précèdent que l'aire d'un rectangle dont les longueurs des deux côtés adjacents sont les réels a et b mesure $a \times b$.
En voici une preuve déduite de ce qui précède :
Si a et b sont des entiers, alors un rectangle dont les longueurs des côtés est la réunion de $a \times b$ rectangles d'aire 1 : son aire est $a \times b$ puisque tous ces rectangles ont deux à deux une intersection vide ou une arête comme le montre la figure qui suit

pour un rectangle de cotés de longueurs 2 et 3.

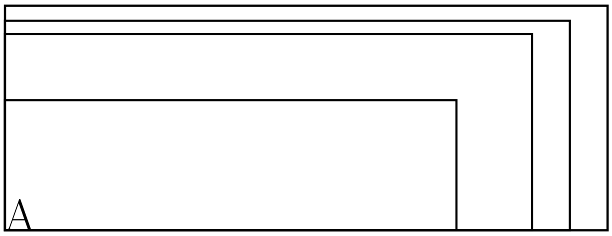


Si a et b sont les nombres rationels $a = \dfrac{p}{q}$ et $b = \dfrac{r}{s}$, alors nous appelons A l'aire de ce rectangle lui-même appelé R. Nous considérons le rectangle $\mathcal{R}$ dont les côtés ont pour longueurs les entiers p et r. L'aire de $\mathcal{R}$ est $p \times r$ d'après ce qui précède, mais par le quadrillage $\mathcal{R}$ est la réunion de $q \times s$ rectangles qui sont des translatés de R tels que deux rectangles différents ne se rencontrent pas ou se rencontrent sur l'un des coté, l'aire de $\mathcal{R}$ est donc $q \times s \times A$ et cette aire vaut $p \times r$. A satisfait donc l'équation $q \times s \times A = p \times r$ donc

$$A = \frac{p \times r}{q \times s} = \frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = a \times b$$

Si a et b sont deux nombres réels, alors a et b sont limites de deux suites croissantes de nombres rationels positifs, la suite $a_0, a_1, \ldots$ a pour limite a, la suite $b_0, b_1, \ldots$ a pour limite b. Si R est un rectangle de sommets A, B, C, D alors, pour un entier n, nous appelons R_n le rectangle inclus dans R de sommet A et de cotés de longueurs a_n et b_n inclus dans les cotés de sommet A de longueurs a et b de

$\mathcal{R}$ (voir figure en dessous)

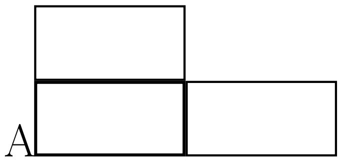


Soit $\mathcal{R} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} R_n$ alors l'aire de $\mathcal{R}$ est la limite des aires de R_n. Ces aires valant $a_n \times b_n$, la limite $a \times b$ de cette suite est l'aire de $\mathcal{R}$. Chacun des R_n est inclus dans R : l'aire de $\mathcal{R}$ est inférieure ou égale à celle de R.

$\mathcal{R}$ est R privé de deux de ses cotés (en parcourant ses sommets A, B, C, D «dans le sens des aiguilles d'une montre») : ce sont les côtés BC et CD. En effet :

- Tout point de ces côtés n'est jamais dans R_n et donc jamais dans leur réunion $\mathcal{R}$.
- Pour n assez grand un point quelquonque de R privé des côtés BC et CD est dans R_n et donc dans la réunion $\mathcal{R}$ des R_n.

Soit la figure suivante :



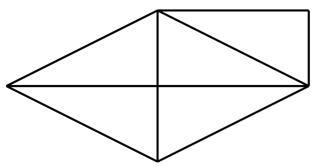
C'est la réunion de trois translatés de R, c'est aussi la réunion de $\mathcal{R}$ et de deux translatés de R. Pour ces deux réunions chaque partie du plan a avec une autre, une intersection qui est vide ou un segment de droite. L'aire de la figure précédemment représentée est

$$3 \times \mathcal{A}(R) = 2 \times \mathcal{A}(R) + \mathcal{A}(\mathcal{R})$$

On en déduit que $\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(\mathcal{R}) = a \times b$.

0.2 La relation de Pythagore

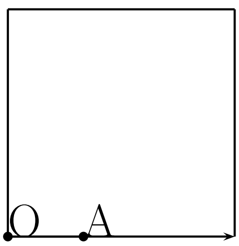
Soit R un rectangle de cotés de longueurs a et b, considérons la figure suivante :



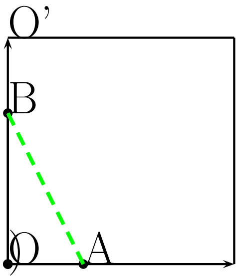
Elle est la réunion de cinq **triangles rectangles** adjacents par un point ou un segment. Chacun des triangles se déduit d'un seul triangle par un déplacement ou un antidéplacement (symétrie orthogonale ou symétrie orthogonale glissée) et ont même aire R. Appelons a et b, où $a \leq b$ les **longueurs des cotés autres que l'hypothénuse** alors le **rectangle qui apparait sur la figure comme union de deux rectangles adjacents** a pour aire $a \times b = 2 \times R$:

l'aire d'un triangle rectangle dont les cotés issus de l'angle droit mesurent a et b mesure donc $\dfrac{a \times b}{2}$. Le **losange qui apparait sur la figure comme union de quatre triangles rectangles adjacents** a donc pour aire $4 \times \dfrac{a \times b}{2} = 2 \times a \times b$. Pour le losange, si on remarque que les longueurs des diagonales (qui sont toujours orthogonales) sont $2 \times a$ et $2 \times b$, que a et b ne sont pas fixés *à priori* on obtient : **L'aire de tout losange est la moitié du produit des longueurs de ses diagonales**.

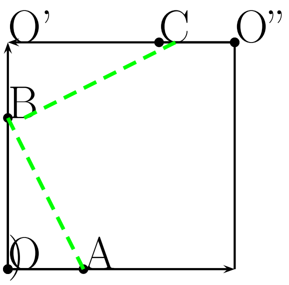
Soient $a \leq b$ deux nombre réels positifs et non nuls et un carré dont chaque coté mesure $a + b$. Choisissons une arête, un sommet O et fixons une orientation sur cette arête, sur cette arête appelons A le point tel que $\overline{OA} = a$ (voir figure)



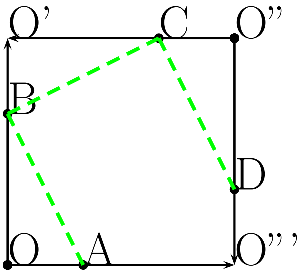
Choisissons alors une orientation du plan et considérons l'arête qui se déduit de la première par rotation de centre O et d'angle droit, l'orientation de cette arête est alors fixée par celle du plan, nous appelons O' le sommet de la deuxième arête qui n'est pas O et B le point tel que $\overline{B0'} = a$ (voir figure)



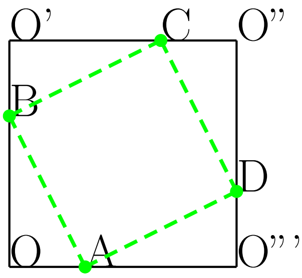
Considérons l'arête qui se déduit de la deuxième par rotation de centre O' et d'angle droit, l'orientation de cette arête est alors fixée par celle du plan, nous appelons O'' le sommet de la troisième arête qui n'est pas O' et C le point tel que $\overline{CO''} = a$ (voir figure)



Considérons l'arête qui se déduit de la troisième par rotation de centre O'' et d'angle droit, l'orientation de cette arête est alors fixée par celle du plan, nous appelons O''' le sommet de la quatrième arête qui n'est pas O'' et D le point tel que $\overline{DO'''} = a$ (voir figure)



Le quadrilatère (A, B, C, D) est un carré (voir figure)



Evaluons le produit scalaire : $<\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}>= p$

$$\begin{aligned} p &= <\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{BO'}+\overrightarrow{O'C}> \\ &= 0+<\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{O'C}> + <\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{BO'}> +0 \\ &= -a\times b + b\times a = 0 \end{aligned}$$

Par l'action de trois rotations successives, lesquelles sont des isométries, on a aussi

$0 = p =<\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}>=<\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}>=<\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AB}>$

Ceci prouve que le quadrilatère (A, B, C, D) est un rectangle, **ce rectangle est un carré puisque**

les longueurs de tous ses côtés sont égales.

En effet la différence ensembliste entre le carré extérieur et le quadrilatère (A, B, C, D) est l'union de quatre triangles qui se déduisent par déplacements et dont les hypothénuses sont de longeurs égales aux cotés du quadrilatère (A, B, C, D).
Si c est la longueur de cette hypothénuse alors l'aire de ces quatres triangles est $4 \times \dfrac{a \times b}{2}$ c'est aussi $\dfrac{(a+b)^2}{2} - c^2$, il vient donc

$$2 \times a \times b = a^2 + b^2 + 2 \times a \times b - c^2$$

soit

$$c^2 = a^2 + b^2$$