Aequationes Math. XX (2002) 1–36
0001-9054/02/010001-36 \$ 1.50+0.20/0

Aequationes Mathematicae

Nouveaux résultats autour des formes super-irréductibles d'un système différentiel linéaire

Alain Wazner

Summary. In this paper we define canonical forms of the matrix M of the linear differential equation $(S) : \frac{dY}{dx} = MY$, such taht the Newton polygon of the characteristic polynom of M is equal to the Newton polygon of (S), we use super-irreducible forms to introduice two invariant polygons : the upper and the lower Newton Polygon. We prove that the Newton polygon of the characteristic polynomial of a super-irreducible form is equal to the Newton polygon, and use «partially super-irreducible matrix» to compute the exponential part of formal solutions.

Mathematics Subject Classification (2000). 65L07 ; G : 1.7.

Keywords. Linear system of differential equations, singular points, Newton polygon, formal solutions, super-irreducible matrix, characteristic polynomials.

1. Notations

- Dans cet article, $\mathbb{C}[[x]]$ est l'anneau des séries formelles «en x» à coefficients dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{C}((x)) = \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$ est le corps des fractions de $\mathbb{C}[[x]]$.
- Si p est un entier $\mathbb{C}((x^{1/p}))$ est le quotient $\mathbb{C}((x^{1/p})) = \mathbb{C}((x))[Y]/(Y^p - x)$ où $(Y^p - x)$ est l'idéal engendré par $Y^p - x$.
- $\mathfrak{P}_\mathbb{C}$ est le corps des séries de Puiseux à coefficients sur $\mathbb{C}$.
  On a $\mathfrak{P}_\mathbb{C} = (\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{C}((x^{1/i})))/\mathfrak{R}$ où $\mathfrak{R}$ est la relation définie par $s_1 \mathfrak{R} s_2$ si et seulement si $\pi(s_1) = \pi(s_2)$ où π est l'application telle que $\pi(s) = s$ si $s = s_0 \in \mathbb{C}$, et si s$\in \mathbb{C}((x^{1/i}))$ et $s = \sum_{k=ik_0}^{\infty} s_k (x^{1/i})^k$ alors on appelle j le plus grand diviseur de i tel que $\{k \in \mathbb{Z}/s_k \neq 0\} \subset j\mathbb{Z}$ on alors $s = \sum_{p=(i/j)k_0}^{\infty} s_{pj} (x^{1/i})^{pj}$ et $\pi(s)$ est l'élément de $\mathbb{C}((x^{j/i}))$ égal à $\sum_{p=(i/j)k_0}^{\infty} s_{pj} (x^{j/i})^p$.
- Tout élément de $\mathfrak{P}_\mathbb{C}$ peut être écrit $s = x^\mu \sum_{k=0}^{\infty} s_k (x^{1/i})^k$ où $s_0 \neq 0$, on appelle alors μ la valuation de s et on la note $v(s) = \mu$, on note $v(0) = +\infty$.
- Si Y est un vecteur colonne (i.e. $Y = ^t (Y_1, \ldots, Y_n))$ avec $Y_i \in \mathfrak{P}_\mathbb{C}$ on note $v(Y) = \min_{1 \le i \le n}(v(Y_i))$.
- Si M est une matrice carrée d'ordre n à coefficients Y_{ij} dans $\mathfrak{P}_\mathbb{C}$, on note $v(M) = \min_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}(v(Y_{ij}))$.

- Si K est un corps $M_n(K)$ est l'anneau des matrices carrées d' ordre n à coefficients sur K, $Gl_n(K)$ est le groupe multiplicatif des matrices inversibles de $M_n(K)$.
- Si $M_1, \ldots, M_s$ sont des matrices de $M_{n_1}(K), \ldots, M_{n_s}(K)$ avec $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$ alors $\mathrm{diag}(M_1, \ldots, M_s)$ désigne la matrice de $M_n(K)$ diagonale par bloc de $\mathrm{i}^{\text{ème}}$ bloc diagonale M_i.
- I_n est la matrice identité d'ordre n.
- Suivant le contexte $O(x^p)$ désigne une série formelle, vecteur ou matrice de valuation supérieure ou égale à p.

2. Introduction

Pour une équation différentielle linéaire scalaire, à coefficients sur $\mathbb{C}((x))$, il existe une méthode de réduction, ou de calcul de la partie exponentielle des solutions formelles basée sur un algorithme de cassure des pentes du polygone de Newton (voir plus loin), qui a été utilisée par le logiciel DESIR, et initiée dans un article de B. Malgrange [1]. En ce qui concerne les systèmes différentiels linéaires à coefficients sur $\mathbb{C}((x))$, on peut en théorie se ramener à une équation différentielle en utilisant le lemme du vecteur cyclique [2]. Cependant dans [3], Hilali montre que quand les coefficients de l'équation différentielle linéaire associée à un système différentiel sont polynômiaux, ils sont de haut degré même si le système différentiel de départ est polynômial de bas degré, et il apparaît que des méthodes «directes» (sans passage à une équation différentielle) doivent être mises en œuvre pour éliminer cette complexité. Pour peu que l'on sache par un algorithme «simple» obtenir le polygone de Newton d'un système différentiel, on peut facilement mettre en œuvre la méthode de cassure des pentes du polygone de Newton pour calculer la partie exponentielle des solutions formelles, en effet le changement d'inconnue $y = e^{-\alpha t^{-q}} z$ où $t^p = x$ se traduit par changer la matrice $M(x)$ du système différentiel en $pt^{p-1}M(t^p) - \alpha q t^{-q-1} I_n$. Dans [4] Hilali propose pour calculer le polygone de Newton d'un système différentiel un algorithme basé sur le calcul d'une forme super-irréductible, développée par l'auteur et Hilali dans [5], il calcule une forme super-irréductible $S(x)$ équivalente différentiellement (voir plus loin) à la matrice du système $M(x)$, puis il montre qu'après une ramification arbitraire et assez grande $t^p = x$, une forme super-irréductible équivalente différentiellement à $pt^p S(t^p)$, soit $R(t)$, est telle que le polygone de Newton du polynôme caractéristique de R est égal au polygone de Newton du système de matrice $M(x)$. Cette méthode présente un défaut important : elle calcule tout le polygone de Newton ce qui n'est pas nécessaire pour obtenir les parties exponentielles des solutions – à chaque étape de l'algorithme de cassure de ses pentes seule la connaissance des plus grandes est nécessaire – de plus la ramification arbitraire bien que limitée multiplie le degré des coefficients de R par p. Barkatou dans [6] utilise implicitement une décomposition de la matrice du système différentiel suivant les pentes du polygone de Newton de la manière suivante : Il calcule l'invariant de Moser [7] d'un système différentiel (ce qui revient à commencer le calcul d'une forme super-irréductible), il obtient un système de matrice $\frac{1}{x^{q+1}}(N_0 + xN_1 + \dots)$ et considère les deux cas qui suivent :

- N_0 a au moins deux valeurs propres distinctes : il y a réduction de l'ordre du système de la manière suivante : si $N_0 = \mathrm{diag}(P_1, P_2)$ où P_1 et P_2 n'ont pas de valeurs propres communes alors après un changement d'inconnue y=Tz le système $\frac{dy}{dx} = Ny$ devient $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x^{q+1}}\mathrm{diag}(Q_1, Q_2)z$ avec $Q_1 = P_1 + O(x)$ et $Q_2 = P_2 + O(x)$. T est à priori la peu algorithmique série $I_n + xT_1 + \dots$ et peut être remplacée pratiquement par le polynôme matriciel $I_n + xT_1 + \cdots + x^sT_s$, avec $s = qn$.
- $N_0 = \lambda I_n + P$ où P est nilpotente : après le changement d'inconnue $y = e^{-\frac{\lambda}{q}t^{-q}}z$ le système $\frac{dy}{dx} = Ny$ devient $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x^{q+1}}(P + O(x))$, il calcule l'invariant de Moser du système en z, il obtient un système de matrice $\frac{1}{x^{q'+1}}(N'_0 + xN'_1 + \dots)$ où $q' < q$. Si $q' < 0$ alors le système admet n solutions formelles indépendantes exprimées matriciellement sous la forme $x^R\phi(x)$ où $R \in M_n(\mathbb{C})$ et $\phi \in Gl_n(\mathbb{C}[[x]])$. Si $q' > 0$ alors si N'_0 n'est pas nilpotente il montre que $q' < q$: il a réduit q, le rang de Poincarré du système, si N'_0 est nilpotente alors après une ramification adéquate $x = t^p$ et calcul de l'invariant de Moser du système de variable t il obtient un système de matrice $\frac{1}{t^{q''+1}}(N''_0 + tN''_1 + \dots)$ où N''_0 a au moins deux valeurs propres distinctes (rang de Katz [8], [9]) il est ramené au premier cas.

En combinant ces deux cas, il se ramène après une succession de changements d'inconnues $y = e^{-\frac{\lambda}{q}x^{-q}}z$, $y = (I_n + xT_1 + \dots)z$ et de réductions au rang de Moser à un système de matrice $\mathrm{diag}(M_1, M_2, \dots, M_s)$ où M_i est d'ordre 1 ou de valuation supérieure ou égale à 1 : dans le premier cas on a une équation différentielle scalaire d'ordre 1 qui se résoud facilement par quadrature, dans le deuxième cas on a un système dont on a vu qu'il admettait des solutions formelles indépendantes exprimées matriciellement sous la forme $x^R\phi(x)$ où $R \in M_m(\mathbb{C})$ et $\phi \in Gl_m(\mathbb{C}[[x]])$. Le principal défaut de cet algorithme consiste dans les opérations de réductions de l'ordre du système (premier cas) qui augmentent la complexité des coefficients de la matrice du système, cela d'autant plus que l'on opère des ramifications. Nous présentons dans cet article un algorithme, pour obtenir la partie exponentielle des solutions formelles, qui à la fois évite les ramifications arbitraires et les opérations de bloc-diagonalisation. Cet algorithme est basé sur un théorème qui montre que le polynône caractéristique d'une forme super irréductible a pour polygone de Newton : le polygone de Newton du système différentiel, pour le démontrer nous introduirons différentes notions : les formes polygonales compatibles (plus fortes que les formes super-irréductibles mais qui existent en général sur $M_n(\mathbb{C}((t)))$ où $t^p = x$), deux polygones invariants qui encadrent le polygone de Newton d'un système différentiel le sur et le sous p-polygone de Newton, puis nous montrerons comment l'utilisation de formes partiellement super-irréductibles permet d'obtenir la partie exponentielle des solutions formelles. Avant de démontrer ce théorème et d'introduire ces notions, nous allons rappeler quelques résultats et définitions.

3. Polygone de Newton, solutions formelles d'un opérateur différentiel linéaire, algorithme de cassure des pentes du polygone de Newton, systèmes différentiels et vecteurs cycliques, formes super-irréductibles

3.1. L'algèbre non commutative $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}[\partial]$

Définition 3.1. Sur $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}$ on définit l'opérateur $\mathbb{C}$-linéaire ∂ qui à un élément $s = \sum_{k=pv(s)}^{+\infty} s_k x^{\frac{k}{p}}$ associe $\partial(s) = \sum_{k=pv(s)}^{+\infty} \frac{k}{p} s_k x^{\frac{k}{p}-1} = \frac{ds}{dx}$ (dérivée de s), ∂ a la propriété $\partial(s_1 s_2) = s_1\partial(s_2) + s_2\partial(s_1)$.

Définition 3.2. Opérateur $a\partial$: si a appartient à $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}$ c'est l'opérateur qui à s de $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}$ associe $a\partial(s)$.

Définition 3.3. Opérateur ∂a : si a appartient à $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}$ c'est l'opérateur qui à s de $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}$ associe $\partial(as)$.

Propriété 3.1. $\partial a = a\partial + \frac{da}{dx}$ *où* $\frac{da}{dx}$ *désigne l'opérateur qui à* s *associe* $s\frac{da}{dx}$.

Définition 3.4. Opérateur ∂^n (n entier) : c'est l'identité de $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}$ si $n = 0$, et si $n > 0$ c'est $\partial \circ \partial^{n-1}$.

Définition 3.5. $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}[\partial]$ est l'ensemble des opérateurs $\sum_{k=0}^{n} a_k\partial^k$ où les a_k appartiennent à $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}$, cet ensemble possède une structure d'algèbre non commutative. Si a_n n'est pas nul alors on dit que $\sum_{k=0}^{n} a_k\partial^k$ est d'ordre n. On appelle les a_k les coefficients de $\sum_{k=0}^{n} a_k\partial^k$.

3.2. Polygone de Newton d'un élément de $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}[\partial]$

Dans la suite on notera PDN pour polygone de Newton.

Définition 3.6. Le PDN de $\sum_{k=0}^{n} a_k\partial^k$ est l'enveloppe convexe de $\bigcup_{k=0}^{n} Q(k, v(a_k) - k)$ où $Q(k, v(a_k) - k)$ est l'ensemble $\{(x, y) \in (R)^2/x \leq k$ et $y \geq v(a_k)\}$ si a_k n'est pas nul, l'ensemble vide sinon.

Propriété 3.2. *Si* a_n *est différent de* 0 *l'intersection du PDN de* $\sum_{k=0}^{n} a_k\partial^k$ *avec le demi-plan* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x \geq 0\}$ *est égal à*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/n \geq x \geq 0 \text{ et } y \geq \phi(x)\}$$

où ϕ *est affine par morceaux, convexe, croissante et continue. Les valeurs des pentes du graphe de* ϕ *sont appelées pentes du PDN, leur ensemble est fini. Si* p *est une pente du PDN l'ensemble* $(\phi')^{-1}(p)$ *est un intervalle dont les extrémités sont des entiers inclus dans* $[0, n]$*, la longueur de cet intervalle est appelé longueur de la pente* p.

3.3. Algorithme de cassure des pentes du PDN d'un élément de $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}[\partial]$

Si un élément $L = \sum_{k=0}^{n} a_k \partial^k$ de $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}[\partial]$ est à coefficients sur des séries de rayons de convergences non nuls, l'équation $L(y) = 0$ est une équation différentielle dans le champ complexe, l'équation différentielle qui s'en déduit par le changement d'inconnue $y = e^{\Lambda} z$ où $\Lambda \in \mathbb{C}[x^{-\frac{1}{q}}]$ n'a pas de terme constant et q est entier, est l'équation $\sum_{k=0}^{n} a_k \big(\partial + \frac{d\Lambda}{dx}\big)^k (z) = 0$.

Définition 3.7. Pour un opérateur $L = \sum_{k=0}^{n} a_k \partial^k$ de $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}[\partial]$ nous dirons que l'équation $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \big(\partial + \frac{d\Lambda}{dx}\big)^k (z) = 0$ se déduit par le changement d'inconnue $y = e^{\Lambda} z$ dans l'équation $L(y) = 0$. On dira que e^{Λ} est un exposant formel de L si l'équation différentielle qui se déduit de l'équation $L(y) = 0$ par le changement d'inconnue $y = e^{\Lambda} z$ a pour opérateur associé un élément P de $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}[\partial]$ dont le PDN possède une pente nulle et si $\Lambda \in \mathbb{C}[x^{-\frac{1}{q}}]$ n'a pas de terme constant et q est entier.

Il existe un nombre fini d'exposants formels pour un opérateur différentiel, leur nombre est au plus égal à l'ordre de l'opérateur.

3.4. Algorithme de cassure des pentes du PDN d'un élément de $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}[\partial]$

Définition 3.8. Si p_k est une pente du PDN d'un opérateur différentiel d'ordre n, $L = \sum_{k=0}^{n} a_k \partial^k$ nous posons $L(\lambda, p_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k \big(\partial + \frac{d(\lambda x^{-p_k})}{dx}\big)^k = \sum_{k=0}^{n} b_k(\lambda, x) \partial^k$, alors si $b_0(\lambda, x) = \sum_{j=\mu}^{+\infty} b_{0,j}(\lambda) x^{\frac{j}{p}}$ où p est entier et $b_{0,\mu}(\lambda) \neq 0$, le polynôme caractéristique associé à p_k est $b_{0,\mu}(\lambda)$.

Propriété 3.3. *Si p_i et n_i sont les suites des pentes par ordre décroissant et des longueurs de pentes correspondantes du PDN de L, p_k une pente quelquonque, alors le polynôme caractéristique associé à p_k a exactement n_k racines non nulles et son degré est $n - n_1 - \cdots - n_{k-1}$ si $k > 1$ et n si $k = 1$, si α est une racine d'ordre o_k inférieur ou égal à n_k du polynôme caractéristique associé à p_k alors : les pentes du PDN de $L(\alpha, p_k)$ strictement supérieures à p_k sont celles du PDN de L avec les mêmes longueur, si $n - n_1 - \cdots - n_{k-1} - o_k$ n'est pas nul, alors la $k^{ième}$ pente du PDN de $L(\alpha, p_k)$ est p_k de longueur $n - n_1 - \cdots - n_{k-1} - o_k$, le PDN de $L(\alpha, p_k)$ admet des pentes de longueur strictement inférieures à p_k et la somme de leurs longueurs est o_k.*

Présentons l'algorithme de cassure des pentes du PDN : nous allons le décrire à l'aide d'une arborescence. Soit $L = \sum_{k=0}^{n} a_k \partial^k$ avec $a_n \neq 0$.

L sera le sommet de l'arborescence. Nous construisons l'ensemble des suivants de L : $S(L)$.

- Si le PDN de L a une seule pente qui est nulle alors $S(L) = \emptyset$. L'arborescence se limite à un seul sommet : L.
- Si le PDN de L possède des pentes non nulles, nous appelons p sa plus grande pente non nulle, et $R(L)$ l'ensemble des racines du polynôme caractéristique

associées à la pente p.

Remarque : éventuellement $0 \in R(L)$.

$S(L)$ est l'ensemble $S(L) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\partial + \frac{d(\alpha x^{-p})}{dx}\right)^k / \alpha \in R(L)\right\}$. Nous joignons alors L à chaque élément par un arc de poids (α, x^{-p}) (voir figure I).

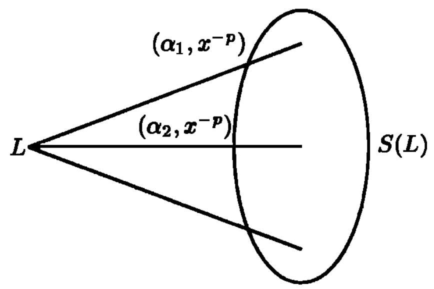

Figure I

Plus généralement M étant un sommet de l'arborescence autre que L, M est atteint par un arc de poids (β, x^{-p}) ($\beta \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{Q}$) nous définissons $S(M)$ l'ensemble des suivants de M de la manière suivante :

- Si le PDN de M n'a pas de pente inférieure à q strictement autre que la pente nulle, alors $S(M) = \emptyset$. M est une terminaison de l'arborescence.
- Sinon on pose $M = \sum_{k=0}^{n} b_k \partial^k$ où $b_n \neq 0$ et nous appelons r la pente du PDN de M immédiatement inférieure à q et $R(M)$ l'ensemble des racines du polynôme caractéristique associé à la pente r.

Nous posons alors $S(M) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} b_k \left(\partial + \frac{d(\alpha x^{-r})}{dx}\right)^k / \alpha \in R(M)\right\}$. Nous joignons alors M à chaque élément $\sum_{k=0}^{n} b_k \left(\partial + \frac{d(\alpha x^{-r})}{dx}\right)^k$par un arc de poids (α, x^{-r}).

Donnons une interprétation de cette arborescence en termes d'équations différentielles :

- Interprétation d'un chemin :

$$L \overset{(\alpha_1, x^{-r_1})}{\longrightarrow} L_1 \overset{(\alpha_2, x^{-r_2})}{\longrightarrow} \dots \overset{(\alpha_i, x^{-r_i})}{\longrightarrow} L_i \dots \overset{(\alpha_s, x^{-r_s})}{\longrightarrow} L_s.$$

  L'existence d'un tel chemin signifie que L_s se déduit de L après le changement de fonction $y = e^{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^{-r_i}}$ dans l'équation différentielle $L(y) = 0$. Remarquons que par construction de l'arborescence la suite r_i est décroissante.
- Cas où L_s est une terminaison de l'arborescence : Par construction de l'arborescence du PDN, L_s a une pente nulle, cela signifie que e^{Λ} avec $\Lambda = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^{-r_i}$ est un *exposant formel* de l'équation différentielle $L(y) = 0$. A chaque terminaison L_s, on peut donc associer un exposant formel de l'équation $L(y) = 0$. Remarquons que si M et N sont deux terminaisons de l'arborescence, les exposants formels qui leur sont associées sont distincts, par construction même de l'arborescence.

On démontre (voir [10]) que l'arborescence est finie : on obtient par cet algorithme l'ensemble fini des exposants formels d'un opérateur différentiel linéaire.

3.5. Systèmes différentiels

Au lieu de considérer $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}$, nous considérons $(\mathfrak{P}_{\mathbb{C}})^n$ et les opérateurs linéaires d'ordre n : $\Omega = \partial I_n - M$ où M appartient à $M_n(\mathfrak{P}_{\mathbb{C}})$.

Un système différentiel linéaire homogène de matrice M est $(S) : \Omega Y = 0$. Un changement de base $Y = TZ$ où $T \in Gl_n(\mathfrak{P}_{\mathbb{C}})$ conduit au système différentiel, après multiplication à gauche par T^{-1}, $(S') : \Omega' Z = 0$ où

$$\Omega' = \partial I_n - (T^{-1}MT - T^{-1}\partial T).$$

Ceci permet de définir une relation d'équivalence sur $M_n(\mathfrak{P}_{\mathbb{C}})$.

Définition 3.9. M_1 est équivalente à M_2 si et seulement si il existe $T \in Gl_n(\mathfrak{P}_{\mathbb{C}})$ telle que $M_1 = T^{-1}M_2T - T^{-1}\partial T$.

Définition 3.10. Si K est un sous-corps de $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}$ stable pour la dérivation on dit que deux éléments M_1 et M_2 de $M_n(K)$ sont K-équivalents si et seulement si il existe $T \in Gl_n(K)$ telle que $M_1 = T^{-1}M_2T - T^{-1}\partial T$.

Définition 3.11. Une fonction f de $M_n(\mathfrak{P}_{\mathbb{C}})$ (resp. $M_n(K)$) vers un ensemble E est dite un invariant différentiel (resp. un K-invariant différentiel) si et seulement si $f(M_1) = f(M_2)$ dès que M_1 et M_2 sont équivalentes (resp. K-équivalentes).

3.6. Equations et systèmes différentiel associés, lemme du vecteur cyclique

On peut ramener une équation différentielle scalaire à un système différentiel de la manière suivante : soit l'équation différentielle $\{\sum_{k=0}^{n} a_k\partial^k\}(y) = 0$, on pose $y_i = \partial^{i-1}y$ alors le système $(\partial I_n - C)(Y) = 0$ où $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et C a la structure suivante : coefficients égaux à 1 sur la sur-diagonale principale, dernière ligne égale à $(a_0a_1 \ldots a_{n-1})$, coefficients nuls ailleurs – toute matrice ayant cette structure est dite matrice compagnon d'une équation différentielle et l'opérateur $\sum_{k=0}^{n} a_k\partial^k$est appelé l'opérateur associé – est le système vérifié par Y.

On peut également associer à un système une équation différentielle par le lemme du vecteur cyclique.

Lemme 3.1. *Soit y_0 un vecteur ligne à coefficients sur $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}$, nous définissons la suite $(y_i)_i$ par $y_{i+1} = \partial(y_i) + y_iM$ et disons que y_0 est un vecteur cyclique pour la matrice M si et seulement si les vecteurs $y_0, \ldots, y_{n-1}$ sont indépendants. Il suit les propriétés :*

(i) *Pour toute matrice $M \in M_n(\mathfrak{P}_{\mathbb{C}})$ (resp. $M \in M_n(\mathbb{C}((x^{1/p}))))$, il existe un vecteur cyclique à coefficients sur $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathbb{C}((x^{1/p}))$) (voir* [10], [2]*).*

(ii) *Si T est l'inverse de la matrice de vecteurs lignes respectivement égaux à $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ où y_0 est un vecteur cyclique, alors la matrice $T^{-1}MT - T^{-1}\partial T$ est sous forme compagnon d'une équation différentielle dont l'opérateur différentiel associé est appelé l'opérateur différentiel associé au système par le vecteur cyclique y_0 (voir* [3]*).*

Propriété 3.4. *Polygone de Newton d'un système différentiel : C'est un résultat désormais classique que le PDN de l'opérateur différentiel associé à un système par un vecteur cyclique ne dépend pas du vecteur cyclique choisi. On défini donc le PDN d'un système différentiel comme le PDN commun à tout opérateur différentiel associé au système par un vecteur cyclique. Le PDN d'un système différentiel est un invariant différentiel : en effet si $M_2 = T^{-1}M_1T - T^{-1}\partial T$ et y_0 est cyclique pour M_1 alors y_0T est cyclique pour M_2 et les opérateurs différentiels associés à M_1 par y_0 et à M_2 par y_0T sont égaux.*

3.7. Formes super-irréductibles

Soit $M \in M_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))$, avec la convention $q = +\infty$ si $M = 0$, nous pouvons toujours écrire l'égalité $M = \frac{1}{x^{1+\frac{q}{p}}}M_0$, $M_0 \in M_n(\mathbb{C}[[x^{1/p}]])$, $M_{0|x=0} \neq 0$ et $q \in \mathbb{Z}$.

Si $q \leq 0$, nous posons $m_p(M) = 1$. Si $q > 0$ nous posons pour $k \in \mathbb{N}$, n_k =nombre de colonnes de M_0 de valuation k/p (remarquons que $n_0 \neq 0$) ; nous posons alors $m_p(M) = q + n_0/n + n_1/n^2 + \cdots + n_{q-1}/n^q$ puis

$$\mu_p(M) = \mathrm{Inf}\{m_p(N))/N = T^{-1}MT - T^{-1}\partial T \text{ et } T \in M_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))\}.$$

Propriété 3.5. *μ_p est par définition même un $\mathbb{C}((x^{1/p}))$-invariant différentiel.*

Définition 3.12. M est dite réduite sur $M_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))$ (ou super-irréductible sur $\mathbb{C}((x^{1/p}))$) si et seulement si $\mu_p(M) = m_p(M)$. M est dite réductible sur $M_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))$ si et seulement si $\mu_p(M) < m_p(M)$.

Définition 3.13. Soit $M \in M_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))$ avec

$$m_p(M) = q + n_0/n + \cdots + n_{q-1}/n^q > 0$$

nous définissons q fonctions notées $T_{k,p}(M)$ où $k \in \{0, \ldots, q-1\}$ par

$$T_{k,p}(M) = x^{r_k}\det(x^{-(k+1)/p}x^{1+q/p}M - \lambda I_n)$$

où $r_k = 1/p[(k+1)n_0 + kn_1 + \cdots + n_k]$.

Propriété 3.6. $T_{k,p}(M) \in \mathbb{C}[[x^{1/p}]][\lambda]\ \forall k \in \{0, \ldots, q-1\}$.

Propriété 3.7. *Nous posons $\mu_p(M) = q* + n_0^*/n + \cdots + n_{q^*-1}/n^{q*}$ et $m_p(M) = q + n_0/n + \cdots + n_{q-1}/n^q$. Si $\preceq$ désigne l'ordre lexicographique alors*

– $(q^*, n_0^*) \overset{\preceq}{\neq} (q, n_0) \Longleftrightarrow v(T_{0,p}(M)) > 0$
– $k \leq 1$ *$(q = q^*)$ et $(n_k > n_k^*)$ et $(n_i = n_i^*)$ pour $i < k$* $\Longleftrightarrow$

$$v(T_{i,p}(M)) = 0 \text{ pour } i < k \text{ et } v(T_{k,p}(M)) > 0.$$

En particulier M est super-irréductible sur $\mathbb{C}((x^{1/p}))$ si et seulement si

$$v(T_{i,p}(M)) = 0 \ \forall i \in \{0, \dots, q-1\}.$$

Dans [5] on en donne une preuve ainsi qu'un algorithme basé sur les éliminations de Gauss pour obtenir une forme super-irréductible.

4. Formes polygonales compatibles, exposants formels

L'objet de cette partie est de donner la définition de formes canoniques plus fortes que les formes super-irréductibles, pour lesquels le PDN du polynôme caractéristique est égal au PDN. On se sert de ces formes pour donner une définition des exposants formels d'un système différentiel sans passer par une équation différentielle scalaire.

4.1. Paramètres de valuations, fonctions S_i

Soit M une matrice de $M_n(\mathfrak{P}_{\mathbb{C}})$ nous appelons α_i la valuation du i$^{\text{ème}}$ vecteur colonne de M et $I(M)$ l'ensemble – éventuellement vide – des valeurs prises par les α_i strictement inférieurs à -1. Nous notons $\{\beta_1, \dots, \beta_s\}$ cet ensemble avec la convention $s = 0$ si $I(M) = \emptyset$ et avec l'ordre $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_s$ dans le cas où $s \neq 0$ nous noterons n_i l'occurrence de β_i dans la famille $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$. Nous posons $\beta_{s+1} = -1$ et $n_0 = 0$.

Définition 4.1. $s, \beta_1, \dots, \beta_s, n_1, \dots, n_s$ sont appelés les paramètres de valuation de M. Nous définissons alors $s+1$ éléments de $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}[\lambda]$ par :

$$S_k(M) = x^{\sum_{i=0}^{k-1} n_i(\beta_k - \beta_i)} \det(x^{-\beta_k} M - \lambda I_n), k \in \{1, \dots, s+1\}.$$

Propriété 4.1. *Les fonctions $S_i(M)$ vérifient la propriété suivante : Appelons $\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^+$ l'ensemble $\{s \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}} / v(s) \geq 0\}$, alors $\forall i \in \{1, \dots, s+1\}$ $S_i(M) \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}^+[\lambda]$. Plus précisément si $M \in M_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))$ alors $\forall i \in \{1, \dots, s+1\}$ $S_i(M) \in \mathbb{C}[[x^{1/p}]][\lambda]$.*

Soit $k \in \{1, \dots, s+1\}$, posons $\delta_k = \mathrm{diag}(\delta_{k,1}, \delta_{k,2}, \dots, \delta_{k,n})$ où $\delta_{k,i} = \beta_k - \alpha_i$ si $\alpha_i \leq \beta_k$, et $\delta_{k,i} = 0$ sinon. Nous remarquons que $\det(x^{\delta_k}) = x^{\sum_{i=0}^{k-1} n_i(\beta_k - \beta_i)}$, de sorte que $S_k(M) = \det(x^{-\beta_k} M x^{\delta_k} - \lambda x^{\delta_k})$. $v(x^{\delta_k}) \geq 0$ et la valuation de la colonne d'indice i de $x^{-\beta_k} M x^{\delta_k}$ est $-\beta_k + \alpha_i + \delta_{k,i}$ positive ou nulle par définition, d'où $v(S_k(M)) \geq 0$.

4.2. Polygone des valuations, polygone de Newton algébrique, formes polygonales compatibles

Définition 4.2. Polygone des valuations : Soient $s, \beta_1, \ldots, \beta_s, n_1, \ldots, n_s$ les paramètres de valuation d'une matrice de $M_n(\mathfrak{P}_{\mathbb{C}})$ rationnels alors il existe une et une seule fonction ϕ_M répondant aux propriétés suivantes :

(1) ϕ_M est une fonction de $]-\infty, n]$ dans $\mathbb{R}$, continue, affine par morceaux, vérifiant $\phi_M(n) = -n$, dérivable sauf en un nombre fini de points.

(2) ϕ_M est convexe. L'ensemble $\{\phi'_M(t), t \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble $\{0, -\beta_s - 1, \ldots, -\beta_1 - 1\}$.

(3) Pour tout i l'ensemble $(\phi'_M)^{-1}\{-\beta_i - 1\}$ est un intervalle de longueur n_i.

Le polygone des valuations de M est l'ensemble convexe du plan $\mathbb{R}^2$ égal à $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq n, y \geq \phi_M(x)\}$.

Exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & x^{-3} & 0 \\ x^{-1} & 0 & x^{-3} \\ x^{-1} & x^{-3} & 0 \end{pmatrix}$$

alors les paramètres de valuation de M sont $s = 1$; $n_1 = 2$; $\beta_1 = -3$. Nous représentons alors le polygone de valuation de M.

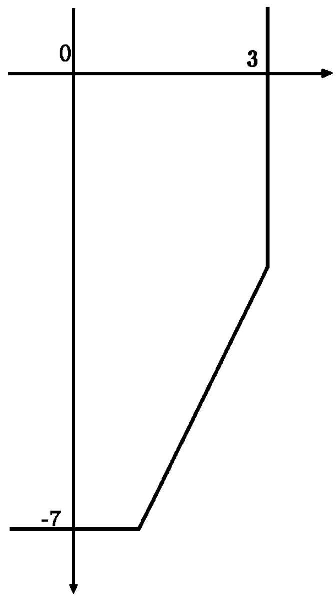

Figure II

Définition 4.3. Polygone de Newton algébrique : soit $M \in M_n(\mathfrak{P}_{\mathbb{C}})$, nous appelons polygone de Newton algébrique de M (on note le PDNA de M) le polygone de Newton du polynôme caractéristique de M, c'est à dire le PDN de L avec $L{=}(-1)^n\Big(\partial^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\partial^k\Big)$ où les a_i sont tels que

$$\det(M - \lambda I_n) = (-1)^n\Big(\lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\lambda^k\Big).$$

Exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & x^{-3} & 0 \\ x^{-1} & 0 & x^{-3} \\ x^{-1} & x^{-3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\det(M - \lambda I_n) = -\lambda^3 + (x^{-6} + x^{-4})\lambda + x^{-7}$.

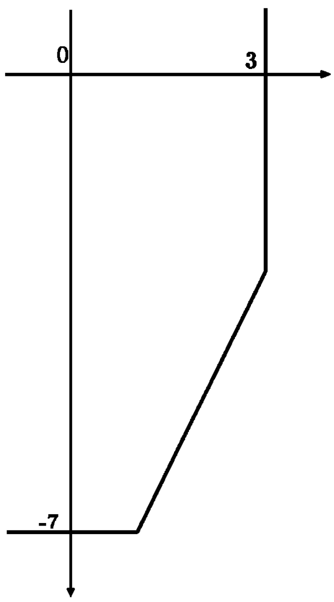

Figure III : Le PDNA de M

Donnons ici une relation entre le polygone de Newton algébrique et le polygone de valuation d'une matrice M.

Propriété 4.2. *Le PDNA de toute matrice est inclus dans son polygone des valuations.*

Pour $k \in \{0, \ldots, s\}$ appelons $J_k(M)$ le point du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnés (x_k, y_k), $x_k = n - (n_0 + n_1 + \cdots + n_k)$, $y_k = -n + (1+\beta_0)n_0 + (1+\beta_1)n_1 + \cdots + (1+\beta_k)n_k$

alors ϕ_M est la fonction affine par morceaux dont le graphe dans le plan $\mathbb{R}^2$ est la réunion de :

- la demi-droite $(6\infty, J_s(M))$ d'équation $x \leq x_s$, $y = y_s$
- des segments $[J_k(M), J_{k-1}(M)]$, $k \in \{1, \ldots, s\}$ (si $s \neq 0$).

Posons à présent $\det(M - \lambda I_n) = (-1)^n \Big(\lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \lambda^k\Big)$, alors pour tout rationnels a et b : $x^a \det(x^b M - \lambda I_n) = (-1)^n (x^q \lambda^n - \sum_{i=0}^{n-1} x^{a+(n-i)b} c_i \lambda^i)$. Si $a \geq 0$ alors $v(x^a \det(x^b M - \lambda I_n)) \geq 0$ équivaut à $a + (n-i)b + v(c_i) \geq 0$, pour tout $i \in \{0, 1, \ldots n-1\}$.

Nous choisissons pour le couple (a, b) les $(s+1)$ valeurs suivantes : $b_k = -\beta_k$ $_k = \sum_{i=0}^{k-1} n_i(\beta_k - \beta_i)$ pour $k \in \{1, \ldots, s+1\}$. Remarquons que $a_k \geq 0$ et que $S_k(M) = x^{a_k} \det(x^{b_k} M - \lambda I_n)$, $k = 1, \ldots, s+1$; de $v(S_k(M)) \geq 0$ nous déduisons les $s+1$ inégalités :

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\ a_k + (n-1)b_k + v(c_i) \geq 0\ k = 1, \ldots, s+1.$$

En remplaçant a_k et b_k par leurs valeurs en fonction de $n_1, \ldots, n_s$ et $\beta_1, \ldots, \beta_{s+1}$ et x_k, y_k (coordonnées des points $J_k(M)$) par leurs valeurs en fonction de $n_1, \ldots, n_s$ et $\beta_1, \ldots, \beta_{s+1}$ ces inégalités s'écrivent :

$$\forall i \in \{0, \ldots, n-1\} : [v(c_i) - i - y_{k-1}] + (1 + \beta_k)[i - x_{k-1}] \geq 0, \forall k \in \{1, \ldots, s\}$$

et $v(c_i) - i \geq y_s$.

Considérons à présent le point du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(i, v(c_i) - i)$ où i appartient à $\{0, \ldots, n-1\}$.

1^{er} cas : Il existe un indice k pour lequel $x_k \leq i \leq x_{k-1}$.

L'inégalité $[v(c_i) - i - y_{k-1}] + (1 + \beta_k)[i - x_{k-1}] \geq 0$ signifie que le point de coordonnées $(i, v(c_i) - i)$ est situé au dessus de (ou sur) la droite de pente $-1 - \beta_k$ passant par le point $J_{k-1}(M)$ de coordonnées (x_{k-1}, y_{k-1}). Sachant que le segment $[J_{k-1}(M), J_k(M)]$ est de pente $-1-\beta_k$, cette droite est la droite passant par $[J_{k-1}(M), J_k(M)]$. Puisque $x_{k-1} \leq i \leq x_k$ le point de coordonnées $(i, v(c_i) - i)$ est situé au dessus du (ou sur le) segment $[J_{k-1}(M), J_k(M)]$ et donc au dessus du (ou sur le) graphe de ϕ_M.

$(i, v(c_i) - i)$ est donc un point du polygone de valuation $(i, v(c_i) - i)$ vérifie donc : $v(c_i) - i \geq \phi_M(i)$.

2^{ème} cas : $i \leq x_s$. Le graphe de ϕ_M comprenant la demi-droite $(\infty, J_s(M))$ d'équation $x \leq x_s$, $y = y_s$ il vient $\phi_M(t) = y_s$ si $t \leq x_s$ de l'inégalité $[v(c_i) - i] \geq y_s$ il vient $v(c_i) - i \geq \phi_M(i)$.

Soit un point du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées x, y vérifiant $y \geq \phi_M(x)$ et $x \leq n$. Alors si $u \leq x$ le point de coordonnées (u, y) vérifie $u \leq n$ et $y \geq \phi_M(u)$ car ϕ_M est croissante. Si $v \geq y$, le point (x, v) vérifie $x \leq n$ et $v \geq \phi_M(x)$. Nous en déduisons que l'ensemble $\{(u, y)/u \leq x\} \cup \{(x, v)/v \geq y\}$ est inclus dans le polygone des valuations de M qui est un convexe. L'enveloppe convexe de cette ensemble est le quadrant $Q(x, y)$ et est inclus dans le polygone de valuation de M. De $v(c_i) - i \geq \phi_M(i)$ et de $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$ et de $\phi_M(n) = -n$ nous en déduisons la relation suivante : $Q(n, -n) \cup (\bigcup_{i=0}^{n-1} Q(i, v(c_i - i))$ est inclus dans le polygone de valuation de M. Par passage aux enveloppes convexes le PDNA de M : l'enveloppe convexe de cet ensemble, est inclus dans le polygone des valuations de M.

Définition 4.4. Formes polygonales compatibles : nous dirons que $M \in M_n(\mathfrak{P}_{\mathbb{C}})$ est sous forme polygonale compatible (on note M est f.p.c.) si et seulement si son polygone des valuations est égal à son PDNA.

Propriété 4.3. *Caractérisation des f.p.c. à l'aide des fonctions $S_i(M)$: soit M une matrice de $M_n(\mathfrak{P}_{\mathbb{C}})$ de paramètres de valuation $s, \beta_1, \ldots, \beta_s, n_1, \ldots, n_s$, on pose $n_0 = 0$ et $\beta_{s+1} = -1$ alors M est f.p.c. si et seulement si : $s = 0$ ou $s > 0$ et*

(i) $v(S_i(M)) = 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, s\}$.

(ii) *$S_i(M)_{|x=0}$ est un polynôme de $\mathbb{C}[\lambda]$ de degré $n - (n_0 + n_1 + \cdots + n_{i-1})$, $i = 1, \ldots, s+1$.*

(iii) *$S_i(M)_{|x=0}$ est un polynôme de $\mathbb{C}[\lambda]$ admettant 0 comme racine d'ordre $n - (n_0 + n_1 + \cdots + n_i)$, $i = 1, \ldots, s$.*

On pose ψ la fonction telle que le PDNA de M est égal à :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq n \text{ et } y \geq \psi(x)\}$$

ψ est convexe, continue par morceaux, croissante et $\psi(n) = -n$. Comme le PDNA de M est contenu dans le polygone des valuations de M : $\psi(x) \geq \phi_M(x) \ \forall x$. Pour $k \in \{0, \ldots, s\}$ appelons $J_k(M)$ le point du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x_k, y_k), sommet du polygone des valuations de M $x_k = n - (n_0 + n_1 + \cdots + n_k)$, et $y_k = -n + (1 + \beta_0)n_0 + (1 + \beta_1)n_1 + \cdots + (1 + \beta_k)n_k$.

Cas où $s = 0$: Alors $\phi_M(x) = -n$, comme $\psi(n) = -n$, ψ est croissante et $\psi(x) \geq \phi_M(x) \ \forall x$, il vient $\psi(x) = \phi_M(x) \ \forall x$ c'est à dire M est f.p.c.

Cas où $s > 0$: Supposons M f.p.c., alors $\psi(x) = \phi_M(x) \ \forall x$ et tout sommet du polygone des valuations de M est sommet du PDNA de M. Il suit que pour l'indice i pour lequel i est l'abscisse de $J_{k-1}(M)$ $(k = 1, \ldots, s)$, soit x_{k-1}, $v(c_i) - i = \psi(i) = \phi_M(i) = y_{k-1}$ où on a posé

$$\det(M - \lambda I_n) = (-1)^n \Big(\lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \lambda^k\Big).$$

Si $b_k = -\beta_k$, $a_k = \sum_{i=1}^{k-1} (\beta_k - \beta_i)$ alors : $S_k(M) = (-1)^n (x^{a_k} \det(x^{b_k} M - \lambda I_n))$ $(k = 1, \ldots, s)$. Si c_i n'est pas nul posons $c_i = x^{-v(c_i)}(c_{i,0} + O(x^{1/p}))$ où p est tel que $M \in M_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))$ alors :

$$S_k(M) = (-1)^n (x^{a_k} \lambda^n - \sum_{i=0}^{n-1} x^{a_k + (n-i)b_k + v(c_i)} (c_{i,0} + O(x^{1/p})) \lambda^k) \quad (k = 1, \ldots, s).$$

Or $a_k + (n - i)b_k + v(c_i) = (v(c_i) - i - y_{k-1}) + (1 + \beta_k)(i - x_{k-1})$: expression nulle en $i = x_{k-1}$. Nous en déduisons que $v(S_k(M)) = 0$ et que $S_k(M)_{|x=0}$ est de degré supérieur ou égal à $x_{k-1} = n - (n_0 + n_1 + \cdots + n_{k-1})$.

Si $i > n-(n_0+n_1+\cdots+n_{k-1})$ alors $\psi'(i)=\phi'_M(i) > -1-\beta_k$, il vient alors $(\psi(i)-y_{k-1})+(1+\beta_k)(i-x_{k-1})>0$, mais le point de coordonnées $(i, v(c_i)-i)$ appartient au PDNA de M donc $v(c_i)-i>\psi(i)$ et alors

$$(v(c_i)-i-y_{k-1})+(1+\beta_k)(i-x_{k-1})>0.$$

$S_k(M)_{|x=0}$ est de degré $n-(n_0+n_1+\cdots+n_{k-1})$.

De manière similaire de $(v(c_i)-i-y_{k-1})+(1+\beta_k)(i-x_{k-1})=0$ si $i=n-(n_0+\cdots+n_k)$ et $\psi'(i)=\phi'_M(i)<-1-\beta_k$ si $i<n-(n_0+n_1+\cdots+n_k)$ nous déduisons que $S_k(M)_{|x=0}$ admet 0 comme racine d'ordre

$$x_k = n-(n_0+n_1+\cdots+n_k).$$

Supposons vraies (i), (ii) et (iii) alors de $S_k(M)_{|x=0}$ est de degré $n-(n_0+n_1+\cdots+n_{k-1})$ soit x_{k-1} il vient que

$$(v(c_i)-i-y_{k-1})+(1+\beta_k)(i-x_{k-1})=0 \text{ si } i=x_{k-1} \text{ et donc } v(c_i)-i=y_{k-1}$$

le point $J_{k-1}(M)$ de coordonnées (x_{k-1}, y_{k-1}) appartient au PDNA de M ($k=1,\ldots,s+1$), nous en déduisons que $\psi(x)=\phi_M(x)\ \forall x$.

En effet soit $x\leq x_s$ alors puisque $J_s(M)$ appartient au PDNA de M : $\psi(x_s)\leq y_s$ et puisque ψ croit $\psi(x)\leq y_s$ mais si $x\leq x_s$ $\phi_M(x)=y_s$ et puisque $\phi_M(x)\leq\psi(x)\ \forall x$, il vient $\psi(x)=\phi_M(x)\ \forall x\leq x_s$.

Si $x_k\leq x\leq x_{k-1}$ où $k=1,\ldots,s$: Sachant que le point $J_k(M)$ de coordonnées (x_k,y_k) appartient au PDNA de M il vient $\psi(x_k)\leq y_k$, mais comme $\phi_M(x)\leq\psi(x)\ \forall x$ et $\phi_M(x_k)=y_k$ il vient $\psi(x_k)=y_k$.

Posons $x=\theta x_k+(1-\theta)x_{k-1}$ où $\theta\in[0,1]$, ψ est convexe donc $\psi(x)\leq\theta\psi(x_k)+(1-\theta)\psi(x_{k-1})$ c'est à dire $\psi(x)\leq\theta\phi_M(x_k)+(1-\theta)\phi_M(x_{k-1})$. Le graphe de ϕ_M est un segment de droite entre les abscisses x_k et x_{k-1} donc

$$\theta\phi_M(x_k)+(1-\theta)\phi_M(x_{k-1})=\phi_M(\theta x_k+(1-\theta)x_{k-1})=\phi_M(x)$$

il vient $\psi(x)\leq\phi_M(x)$, sachant que $\phi_M(x)\leq\psi(x)$ nous en déduisons que $\phi_M(x)=\psi(x)$ c'est à dire que M est f.p.c.

Propriété 4.4. *Perturbation des f.p.c. : Soient M et N deux matrices de $M_n(\mathfrak{P}_{\mathbb{C}})$, supposons que M est f.p.c. de paramètres de valuation $s,\beta_1,\ldots,\beta_s,n_1,\ldots,n_s$ et $v(N)\geq -1$ alors :*

(i) *$M+N$ est f.p.c. de paramètres de valuation $s,\beta_1,\ldots,\beta_s,n_1,\ldots,n_s$.*

(ii) *$\forall k\in\{1,\ldots,s\}$ $S_k(M)_{|x=0}=S_k(M+N)_{|x=0}$.*

(iii) *M et $M+N$ ont même PDNA.*

(iii) est une conséquence de (i), nous montrons (i) et (ii).

Si $v(M)\geq -1$ alors $v(M+N)\geq -1$, $M+N$ est f.p.c. puisque $s=0$.

Si $v(M)<-1$, puisque $v(N)\geq -1$ $M+N$ a mêmes paramètres de valuations que M soient $s,\beta_1,\ldots,\beta_s,n_1,\ldots,n_s$ ces paramètres.

En montrant que $v(S_k(M))\geq 0$ nous savons trouver une matrice δ_k à coefficients rationnels positifs telle que $\det(x^{\delta_k})=x^{\sum_{i=1}^{k-1}n_i(\beta_k-\beta_i)}$ et $v(x^{-\beta_k}Mx^{\delta_k})\geq 0$, de sorte que $S_k(M) = \det(x^{-\beta_k} M x^{\delta_k} - \lambda x^{\delta_k})$: en utilisant cette matrice on a, si $k < s+1$ $v(x^{-\beta_k} N x^{\delta_k}) \geq -\beta_k - 1 > 0$ il vient $S_k(M)_{|x=0} = S_k(M+N)_{|x=0}$ ce qui donne (ii).

Nous en déduisons que $v(S_k(M+N)) = 0$ et $S_k(M+N)_{|x=0}$ est un polynôme de $\mathbb{C}[\lambda]$ de degré $n - (n_0 + n_1 + \cdots + n_{k-1})$ admettant 0 comme racine d'ordre $n - (n_0 + n_1 + \cdots + n_k)$.

Pour montrer que $M+N$ est f.p.c. il suffit de montrer que $S_{s+1}(M+N)_{|x=0}$ est un polynôme de $\mathbb{C}[\lambda]$ de degré $n - (n_0 + n_1 + \cdots + n_s)$, ce que nous faisons en posant $\det(M + N - \lambda I_n) = (-1)^n \{\lambda^n - \sum_{i=0}^{n-1} d_i \lambda_i\}$ et pour $k \in \{0, \ldots, s\}$: $J_k(M+N)$ le point du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x_k, y_k), sommet du polygone des valuations de $M+N$ avec $x_k = n - (n_0 + n_1 + \cdots + n_k)$, et $y_k = -n + (1+\beta_0)n_0 + (1+\beta_1)n_1 + \cdots + (1+\beta_k)n_k$.

On a vu que $v(S_{s+1}(M+N)_{|x=0}) \geq 0$ est équivalent à $v(d_i) - i \geq y_s$ $\forall i$ et que $v(S_s(M+N)_{|x=0}) \geq 0$ est équivalent à $[v(d_i) - i - y_{s-1}] + (1+\beta_s)[i - x_{s-1}] \geq 0$ $\forall i$.

Si $i > x_s$, le point de coordonnées $(i, v(d_i) - i)$ du PDNA de $M+N$ appartient donc au polygone des valuations de $M+N$ et est donc au dessus ou sur le graphe de ϕ_{M+N} de pente positive non nulle dans cette partie du plan : il vient $\phi_{M+N}(i) > y_s$ et donc $v(d_i) - i > y_s$. Le degré de $S_{s+1}(M+N)_{|x=0}$ est au plus égal à $x_s = n - (n_1 + \cdots + n_s)$.

$S_s(M+N)_{|x=0}$ admet 0 comme racine d'ordre $n - (n_1 + \cdots + n_s) = x_s$ cela entraîne que $[v(d_i) - i - y_{s-1}] + (1+\beta_s)[i - x_{s-1}] = 0$ en $i = x_s$ ceci équivaut à $v(d_i) - i = y_s$ si $i = x_s = n - (n_1 + \cdots + n_s)$. Le degré de $S_{s+1}(M+N)_{|x=0}$ est donc $x_s = n - (n_1 + \cdots + n_s)$.

Considérons une matrice M de $M_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))$ alors il lui existe par le lemme du vecteur cyclique une matrice équivalente C compagnon d'un opérateur différentiel $L = \sum_{k=0}^{n} a_k \partial^k$. En remarquant que $\det(C - \lambda I_n) = (-1)^n \Big(\lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k\Big)$ il vient que le PDN de M égal au PDN de C est le PDNA de C.

Soit ϕ la fonction convexe telle que le PDNA de C soit

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq n, y \geq \phi(x)\}$$

et $\delta(x) = -n - x - \phi(x)$ alors si $\{p_1, \ldots, p_r\}$ est l'ensemble fini et non vide des valeurs prises par ϕ' ordonnées par $0 = p_r < p_{r-1} < \cdots < p_1$ nous posons $i_0 = n$ et $s = r - 1$. Si $s \neq 0$ nous posons pour $k \in \{1, \ldots, s\}$ $\beta_k = -1 - p_k$, et $i_k = n - (l_1 + \cdots + l_k)$ où l_k est la longueur de l'intervalle $\phi'^{-1}\{p_k\}$. Nous avons les propriétés :

(i) $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_s$.

(ii) Si i est un entier appartenant à l'intervalle $]i_{k+1}, i_k]$, alors

$$\delta(i) - \delta(i-1) = \beta_{k+1} \text{ et } v(x^{\delta(i) - \delta(n)} a_{i-1}) \geq \beta_{k+1}.$$

En effet si $t \in]i_{k+1}, i_k[$ alors $\phi'(t) = p_{k+1}$. Si i est un entier appartenant à $]i_{k+1}, i_k]$ alors $i-1$ est un entier qui est égal à i_{k+1} ou qui appartient à $]i_{k+1}, i_k]$. Nécessairement il vient $\phi(i) - \phi(i-1) = p_{k+1}(i - (i-1)) = p_{k+1}$ d'où $\delta(i) - \delta(i-1) = \beta_{k+1}$. Le point $(i-1, v(a_{i-1}) - i + 1)$ appartient au PDNA de C, il vient alors

$v(a_{i-1}) - i + 1 \geq \phi(i-1)$. Nous avons alors

$v(x^{\delta(i)-\delta(n)}a_{i-1}) \geq \delta(i) - \delta(n) + \phi(i-1) + i - 1$, donc $v(x^{\delta(i)-\delta(n)}a_{i-1}) \geq \beta_{k+1}$.

Nous posons alors $\gamma = \mathrm{diag}(\delta(1), \delta(2), \ldots \delta(n))$.

$x^{-\gamma}Cx^{\gamma}$ est f.p.c. de paramètres $s, \beta_1, \ldots, \beta_s, l_1, \ldots, l_s$:

Appelons $d_1, d_2, \ldots d_n$ les vecteurs colonnes de $x^{-\gamma}Cx^{\gamma}$, alors

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x^{\delta(1)-\delta(n)}a_0 \end{pmatrix} \text{ et si } i \neq 1 \; d_i = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x^{\delta(i)-\delta(i-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x^{\delta(i)-\delta(n)}a_{i-1} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \uparrow \\ i-1 \\ \downarrow \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Considérons d'abord le cas où $s = 0$: alors la fonction ϕ est constante et égale à $-n$, δ est donc la fonction définie par $\delta(t) = -t$. Il vient donc $\delta(i) - \delta(i-1) = -1$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Sachant que le point de coordonnées $(i, v(a_i) - i)$ est élément du PDNA de C, il vient $v(a_i) - i \geq \phi(i) = -n$ pour i dans $\{0, 1, \ldots n-1\}$ soit $v(a_i) \geq i - n$ si $i \in \{1, \ldots n\}$. Ce qui donne $v(x^{\delta(i)-\delta(n)}a_{i-1}) \geq n - i + i - 1 - n = -1$. Nous en déduisons que $V(d_1) \geq -1$ et $V(d_i) = -1$ pour $i \neq 1$. $x^{-\gamma}Cx^{\gamma}$ a pour paramètres de valuation $s = 0$, et nous savons alors que dans ce cas elle est toujours f.p.c.

Considérons le cas où $s \neq 0$. Pour $k \neq s$ nous appelons E_{k+1} l'ensemble $]i_{k+1}, i_k] \cap \mathbb{N}$. Nous appelons E_{s+1} l'ensemble $]0, i_s] \cap \; N$. L'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ est égal à l'ensemble $]0, n] \cap \mathbb{N}$ c'est l'union disjointe des E_k.

Si $k \neq s+1$ le cardinal de l'ensemble E_k est égal à $i_{k-1} - i_k = l_k$.

Soit $i \in E_k$, si $i \neq 1$ la proposition précédente entraîne que $V(d_i) = \beta_k < -1$.

Si 0 n'est pas une pente du PDNA de C il vient $v(a_0) = \phi(0)$. Cela entraîne : $v(x^{\delta(i)-\delta(n)}a_0) = \phi(0) - \phi(1) - 1$ et donc $v(d_1) = \beta_s$.

Si 0 est pente du PDNA de C alors $v(a_0) \geq \phi(0)$ cela entraîne

$$v(x^{\delta(i)-\delta(n)}a_0) \geq \phi(0) - \phi(1) - 1 = -1 \text{ et donc } v(d_1) \geq -1.$$

Sachant que E_k est de cardinal l_k et que $E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{s+1} = \{1, \ldots, n\}$ il vient :

– L'ensemble $\{V(d_i)/V(d_i) < -1\}$ est l'ensemble $\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ de cardinal s.

– L'occurrence de β_k dans la famille $(V(d_i))_{1 \leq i \leq n}$ est le cardinal de E_k soit l_k.

$s, \beta_1, \ldots, \beta_s, l_1, \ldots, l_s$ sont donc les paramètres de valuation de $x^{-\gamma}Cx^{\gamma}$. Nous appelons D la matrice $x^{-\gamma}Cx^{\gamma}$ et Val_D la fonction définissant le polygone de valuation de D. Val_D vérifie (1), (2), et (3).

(1) Val_D est une fonction de $]-\infty, n]$ dans $\mathbb{R}$, continue, affine par morceaux, convexe, croissante, vérifiant $\mathrm{Val}_D(n) = -n$.

(2) L'ensemble $\{\mathrm{Val}'_D(t)/t \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble $\{0, -\beta_s - 1, \ldots, -\beta_1 - 1\}$.

(3) Pour tout k l'ensemble $((\mathrm{Val}_D)')^{-1}\{-\beta_k - 1\}$ est un intervalle de longueur l_k.

La fonction ϕ vérifie les hypothèses (1), (2), et (3) elle aussi. Il vient alors $\phi = \mathrm{Val}_D$. Appelons ϕ_D la fonction telle que le PDNA de D est égal à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq n, y \geq \phi_D(x)\}$. Sachant que $\det(x^{-\gamma}Cx^{\gamma} - \lambda I_n) = \det(C - \lambda I_n)$ les PDNA de C et D sont égaux et donc $\phi_D = \phi_C = \phi$. Sachant $\phi = \phi_C = \mathrm{Val}_D$ nous en déduisons que D est f.p.c. de paramètres de valuation $s, \beta_1, \ldots, \beta_s, l_1, \ldots, l_s$.

$x^{-\gamma}Cx^{\gamma} - \gamma/x$ est f.p.c. de paramètres $s, \beta_1, \ldots, \beta_s, l_1, \ldots, l_s$. De plus si $s \neq 0$ $S_i(x^{-\gamma}Cx^{\gamma} - \gamma/x))_{|x=0} = S_i(x^{-\gamma}Cx^{\gamma})_{|x=0}$: cela résulte de la proposition de perturbation des f.p.c.

Nous en déduisons la propriété

Propriété 4.5. *Pour toute matrice M appartenant à $M_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))$ il existe une matrice N f.p.c. dans $M_n(\mathfrak{P}_{\mathbb{C}})$ qui lui est équivalente.*

La construction précédente montre qu'alors les paramètres de valuation $s, \beta_1, \ldots, \beta_s, l_1, \ldots, l_s$ de N s'interprètent de la manière suivante : *s est le nombre de pentes non nulles du PDN de M, $\beta_1, \ldots, \beta_s$ sont égaux à $1 - p_1, \ldots, -1 - p_s$ où $p_1 > p_2 > \cdots > p_s$ sont les pentes non nulles du PDN de M, $l_1, \ldots, l_s$ sont les longueurs de ces pentes.*

Puisque le PDN de M est un invariant différentiel ces paramètres de valuation $s, \beta_1, \ldots, \beta_s, l_1, \ldots, l_s$ sont des invariants différentiels et sont donc communs à toute matrice N équivalente à M et f.p.c.

Remarquons que si M appartient à $M_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))$ la matrice compagnon C appartient aussi à $M_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))$, supposons que les pentes du PDN de M soient des multiples entier de $1/p$ alors la matrice γ a pour coefficients des multiples entiers de $1/p$: la matrice $x^{-\gamma}Cx^{\gamma} - \gamma/x$ est f.p.c. et $\mathbb{C}((x^{1/p}))$-équivalente à M.

Réciproquement si N f.p.c. est $\mathbb{C}((x^{1/p}))$-équivalente à M alors les pentes du PDN de M égales à -1 près à l'opposé des valuations des colonnes de N sont des multiples entiers de $1/p$.

Donnons pour finir une interprétation des polynômes $S_k(M)_{|x=0}$.

Propriété 4.6. *Si N et M sont équivalentes et f.p.c., elles ont mêmes paramètres de valuation $s, \beta_1, \ldots, \beta_s, l_1, \ldots, l_s$, de plus $S_k(M)_{|x=0} = S_k(N)_{|x=0}$ pour $k = 1, \ldots, s$ et $S_k(M)_{|x=0} = (-1)^n \theta_k(\lambda/(\beta_k + 1))$ où $\theta_k(\lambda)$ est le polynôme caractéristique associé à la pente $-(\beta_k + 1)$ du PDN de toute opérateur scalaire différentiel obtenu à partir de M par le lemme du vecteur cyclique et est alors un invariant différentiel.*

Nous montrons le lemme suivant :

Lemme 4.1. *Soient M et N appartenant à $M_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))$ et $\mathbb{C}((x^{1/p}))$-équivalentes, soient b et a des rationnels avec $a \geq 0$ et $b \geq 1$, si il existe deux matrices δ et ϵ diagonales à coefficients rationnels positifs ou nuls telles que*

$$\det(x^{\delta}) = \det(x^{\epsilon}) = x^a, x^b M x^{\delta} = O(1) \text{ et } x^b N x^{\epsilon} = O(1)$$

alors :

– $v(x^a \det(x^b M - \lambda I_n)) \geq 0$, $v(x^a \det(x^b N - \lambda I_n)) \geq 0$
– $x^a \det(x^b M - \lambda I_n) = x^a \det(x^b N - \lambda I_n) + O(x^{b-1})$

On se sert d'une décomposition des éléments de $Gl_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))$: Soit $T \in Gl_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))$ alors $T = Px^\alpha Q$ où P appartient au groupe multiplicatif $G_1 = \{P \in M_n(\mathbb{C}[x^{1/p}])/\det P = 1\}$ $\alpha = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et $\alpha_i \in (1/p)\mathbb{Z}$ et Q appartient au groupe multiplicatif

$$G_2 = \{Q \in Gl_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))/Q = Q_0 + O(x^{1/p}) \text{ et } Q_0 \in Gl_n(\mathbb{C})\} \text{ [7].}$$

Les hypothèses du lemme donnent $x^a \det(x^b M - \lambda I_n) = \det(x^b M x^\delta - \lambda x^\delta)$ mais $x^b M x^\delta - \lambda x^\delta = O(1)$ d'où $v(x^a \det(x^b M - \lambda I_n)) \geq 0$.

De même de $x^a \det(x^b M - \lambda I_n) = \det(x^b N x^\epsilon - \lambda x^\epsilon)$ il vient

$$v(x^a \det(x^b N - \lambda I_n)) \geq 0.$$

Posons $N = T^{-1} M T - T^{-1} \partial T$ et $T = Px^\alpha Q$ alors

$$T^{-1}\partial T = Q^{-1}\alpha/xQ + Q^{-1}\partial Q + T^{-1}\partial P P^{-1} T.$$

Il vient $N + T^{-1}\partial P P^{-1} T - T^{-1} M T = Q^{-1}\alpha/xQ - Q^{-1}\partial Q$ d'où

$$\begin{aligned}&(x^b N x^\epsilon - \lambda x^\epsilon) x^b T^{-1}(M - \partial P P^{-1}) T x^\epsilon + \lambda x^\epsilon \\ &= xb(Q^{-1}\alpha/xQ - Q^{-1}\partial Q)x^\epsilon \; x^b N x^\epsilon - \lambda x^\epsilon = O(1)\end{aligned}$$

et

$$x^b(Q^{-1}\alpha/xQ - Q{-}1\partial Q)x^\epsilon = O(x^{b-1})$$

donc $x^b T^{-1}(M - \partial P P^{-1}) T = O(1)$ et

$$\begin{aligned}&\det(x^b N x^\epsilon - \lambda x^\epsilon) \\ &= \det(x^b T^{-1}(M - \partial P P^{-1}) T x^\epsilon - \lambda x^\epsilon) = O(x^{b-1})\end{aligned}$$

soit

$$\textbf{(1)} \qquad x^a \det(x^b N - \lambda I_n) = x^a \det(x^b M - \lambda I_n - x^b \partial P P^{-1}) + O(x^{b-1})$$

$$x^a \det(x^b M - \lambda I_n - x^b \partial P P^{-1}) = \det(x^b M x^\delta - \lambda x^\delta - x^b \partial P P^{-1} x^\delta).$$

Mais $x^b M x^\delta - \lambda x^\delta = O(1)$ et $-x^b \partial P P^{-1} x^\delta = O(x^{b-1})$ donc

$$\begin{aligned}\textbf{(2)} \qquad \det(x^b M x^\delta - \lambda x^\delta - x^b \partial P P^{-1} x^\delta) &= \det(x^b M x^\delta - \lambda x^\delta) + O(x^{b-1}) \\ &= x^a \det(x^b M - \lambda I_n) + O(x^{b-1}).\end{aligned}$$

De (1) et (2) nous déduisons le lemme.

Soient à présent deux matrices M et N f.p.c. et $\mathbb{C}((x^{1/p}))$-équivalentes : pour les mêmes valeurs $a_k \geq 0$ et $b_k > 1$ $S_k(M) = x^{a_k} \det(x^{b_k} M - \lambda I_n)$ et $S_k(N) = x^{a_k} \det(x^{b_k} N - \lambda I_n)$ $(k = 1, \ldots, s)$, on sait de plus trouver deux matrices δ_k et ϵ_k vérifiant les hypothèses du lemme. Par application de celui-ci on a

$$S_k(M) - S_k(N) = O(x^{b_k - 1})$$

et puisque $b_k > 1$ il vient $S_k(M)_{|x=0} = S_k(N)_{|x=0}$ $k = 1, \ldots, s$.

Une récurrence élémentaire peut montrer que

$$\forall\alpha > 0 \ \ (\partial + \frac{d}{dx}(\lambda x^{-\alpha}))^i = [\frac{d}{dx}(\lambda x^{-\alpha})]^i b_{i0} + F_i,$$

où $v(b_{i0}) = 0$ et $(b_{i0})_{|x=0} = 1$ et F_i est de la forme $\sum_{k=1}^{i} b_{ki}\partial^k$. En écrivant $\frac{d}{dx}(\lambda x^{-\alpha}) = -\alpha\lambda x^{-\alpha-1}$ il vient que le terme en ∂^0 de l'expression $(\partial+\frac{d}{dx}(\lambda x^{-\alpha}))^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(\partial + \frac{d}{dx}(\lambda x^{-\alpha}))^k$ est le terme F où

$$F = (-\alpha\lambda x^{-\alpha-1})^n b_{n0} - \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{k0}(-\alpha\lambda x^{-\alpha-1})^k.$$

Nous pouvons exprimer F/b_{n0} sous la forme de déterminant :

$$F/b_{n0} = (-1)^n \det(C^* - (-\alpha\lambda x^{-\alpha-1})I_n)$$

où C^* est la matrice compagnon de dernière ligne $(a_0^*, \dots, a_{n-1}^*)$ avec $a_k^* = a_k b_{k0}/b_{n0}$. Nous posons alors $\alpha = p_i \neq 0$. Remarquons que :

– L'équation caractéristique associée à p_i s'écrit par définition

$$x^{-v(F)}F_{|x=0} = 0$$

– $v(a_k^*) = v(a_k)\ \forall k \in \{0, \dots, n-1\}$ donc C^* a même PDN que C.

Puisque C^* et C ont même polygone de Newton $x^{-\gamma}C^*x^\gamma$ est f.p.c. avec les même paramètres que $x^{-\gamma}Cx^\gamma$. On peut écrire

$$x^{np_i+1}F/b_{n0} = (-1)^n \det(x^{p_i+1}C^* - (-p_i\lambda)I_n)$$

cette égalité s'écrit aussi $x^{np_i+1}F/b_{n0} = (-1)^n \det(x^{p_i+1}x^{-\gamma}C^*x^\gamma - (-p_i\lambda)I_n)$.

Nous savons que $S_i(x^{-\gamma}C^*X^\gamma)$ est de la forme $x^a\det(x^{p_i+1}x^{-\gamma}C^*x^\gamma - (-p_i\lambda)I_n)$. Posons alors $\omega_i^*(\lambda) = S_i(x^{-\gamma}C^*x^\gamma)_{|x=0}$, comme $v(b_{n0}) = 0$ et $b_{n0|x=0} = 1$ alors nécessairement $x^{-v(F)}F_{|x=0} = (-1)^n\omega_i^*(-p_i\lambda)$. Pour une matrice compagnon le mode de calcul des fonctions $\omega_i(\lambda) = S_i(x^{-\gamma}Cx^\gamma)_{|x=0}$ montre que le calcul de $\omega_i(\lambda)$ ne dépend que de $x^{-v(a_k)}a_{k|x=0}$. Remarquant que

$$x^{-v(a_k^*)}a^*_{k|x=0} = x^{-v(a_k)}a_{k|x=0}$$

il vient $\omega_i^*(\lambda) = \omega_i(\lambda)$. L'équation caractéristique associée à la pente p_i s'écrit alors $(-1)^n\omega_i(-p_i\lambda) = 0$, c'est à dire $(-1)^n\omega_i((1+\beta_i)\lambda) = 0$ il en résulte la proposition.

Exposants formels : Considérons l'algorithme que nous décrivons à l'aide d'une arborescence. Soit $M \in M_n(\mathfrak{P}_{\mathbb{C}})$ alors M sera le sommet de l'arborescence. Nous construisons l'ensemble des suivants de M : $S(M)$.

- Si le PDN de M a une seule pente qui est nulle alors $S(M) = \emptyset$. L'arborescence se limite a un seul sommet : M.
- Si le PDN de M possède des pentes non nulles, nous appelons p la plus grande et $R(M)$ l'ensemble des racines de l'équation $\omega_p(\lambda) = 0$ où $\omega_p(\lambda)$ est la valeur commune de $S_k(N)_{|x=0}$ avec N f.p.c. équivalente à M et k est tel que le paramètre de valuation β_k vaut $-1-p$.

Remarque : éventuellement $0 \in R(M)$.

$S(M)$ est l'ensemble $S(M) = \{M - \alpha x^{-(p+1)} I_n / \alpha \in R(M)\}$. Nous joignons alors M à chaque élément $M - \alpha x^{-(p+1)} I_n$ par un arc de poids $(-\alpha/p, x^{-p})$.

Plus généralement N étant un sommet de l'arborescence autre que M, N est atteint par un arc de poids $(-\beta/q, x^{-q})(\beta \in \mathbb{C}, q \in \mathbb{Q})$ nous définissons $S(N)$ l'ensemble des suivants de N de la manière suivante :

- Si le PDN de N n'a pas de pente inférieure à q strictement autre que la pente nulle, alors $S(N) = \emptyset$. N est une terminaison de l'arborescence.
- Sinon nous appelons r la pente du PDN de N immédiatement inférieure à q et $R(N)$ l'ensemble des racines de l'équation $\omega_r(\lambda) = 0$. Nous posons alors $S(N) = \{N - \alpha x^{-(r+1)} I_n / \alpha \in R(N)\}$. Nous joignons alors N à chaque élément $N - \alpha x^{-(r+1)} I_n$ par un arc de poids $(-\alpha/r, x^{-r})$.

Donnons une interprétation de cette arborescence en termes de systèmes différentiels :

- Interprétation des arcs : $M \overset{(-\alpha/r, x^{-r})}{\longrightarrow} N$. En remarquant qu'en posant $y = e^{-\alpha/r x^{-r}} z$ le système différentiel $\frac{dy}{dx} = My$ se transforme en $\frac{dz}{dx} = (M - \alpha x^{-(r+1)} I_n) z$ la présence d'un arc $M \overset{(-\alpha/r, x^{-r})}{\longrightarrow} N$ signifie que le système différentiel $\frac{dy}{dx} = Ny$ est déduit du système différentiel $\frac{dy}{dx} = My$ par le changement de fonction $y = e^{-\alpha/r x^{-r}} z$.
- Interprétation d'un chemin :

$$M \overset{(-\alpha_1/r_1, x^{-r_1})}{\longrightarrow} M_1 \overset{(-\alpha_2/r_2, x^{-r_2})}{\longrightarrow} \dots \overset{(-\alpha_i/r_i, x^{-r_i})}{\longrightarrow} M_i \dots \overset{(-\alpha_s/r_s, x^{-r_s})}{\longrightarrow} M_s.$$

  L'existence d'un tel chemin signifie que le système différentiel $\frac{dy}{dx} = M_s y$ se déduit du système différentiel $\frac{dy}{dx} = My$ après le changement de fonction $y = e^{\sum_{i=1}^{s} -\alpha/r_i x^{-r_i}} z$. Remarquons que par construction de l'arborescence la suite r_i est décroissante.

Dans le cas où M_s est une terminaison de l'arborescence alors par construction de l'arborescence du PDN : M_s a une pente nulle, cela signifie que $e^{\sum_{i=1}^{s} -\alpha/r_i x^{-r_i}}$ est un *exposant formel* du système différentiel $\frac{dy}{dx} = My$. A chaque terminaison M_s, on peut donc associer un exposant formel du système différentiel $\frac{dy}{dx} = My$. Remarquons que si P et N sont deux terminaisons distinctes de l'arborescence, les exposants formels qui leur sont associées sont distincts, par construction même de l'arborescence, ce sont des invariants différentiels car construits à partir d'invariants différentiels.

Pour peu que l'algorithme «converge» on obtient les exposants formels par celui-ci. C'est ce que nous montrons dans ce qui suit.

Définition 4.5. Soient A_1 et A_2 deux graphes orientés, X_1 et X_2 les ensembles des sommets de A_1 et A_2, U_1 et U_2 les ensembles des arcs de A_1 et A_2, E un ensemble, p_1 le poids des arcs de A_1, c'est à dire une application

$$p_1 : \begin{cases} U_1 \to E \\ u \mapsto p_1(u) \end{cases}$$

p_2 le poids des arcs de A_2, c'est à dire une application

$$p_2 : \begin{cases} U_2 \to E \\ u \mapsto p_2(u) \end{cases}$$

les graphes A_1 et A_2 sont dits équivalents si et seulement si existe une bijection $\phi : X_1 \to X_2$ et une bijection $\psi : U_1 \to U_2$ telles que si x_1 et y_1 sont deux sommets de A_1 joints de x_1 vers y_1 par un arc u_1 de U_1 de poids $p_1(u_1)$ alors les deux sommets $\phi(x_1)$ et $\phi(y_1)$ sont joints par l'arc $\psi(u_1)$ de $\phi(x_1)$ vers $\phi(y_1)$ avec le poids $p_2(\psi(u_1))$, où $p_2(\psi(u_1)) = p_1(u_1)$.

Une conséquence de l'équivalence des graphes est que si A_1 et A_2 sont équivalents et A_1 fini alors A_2 est fini.

Propriété 4.7. *L'arborescence de calcul des exposants formels de la matrice M est équivalente à l'arborescence de l'algorithme de cassure des pentes de L où L est un opérateur associé à M par le lemme du vecteur cyclique.*

Soient $Q \in \mathfrak{P}_{\mathbb{C}}$ et y_0 un vecteur cyclique pour la matrice M d'opérateur différentiel associé $L{=}\partial^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \partial^k$, alors y_0 est cyclique pour la matrice $M - QI_n$ d'opérateur différentiel associé :

$$L^* = (\partial + Q)^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k (\partial + Q)^k.$$

En effet si $(\partial - Q)^n = \partial^n + \sum_{j=0}^{n-1} Q_{n,j}\partial^j$ alors un calcul élémentaire montre que :

$$\begin{aligned}(\partial - Q)^{n+1} = \partial^{n+1} &+ (Q_{n,n-1} - Q)\partial^n \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} \Big(Q_{n,j-1} + \frac{dQ_{n,j}}{dx} - QQ_{n,j}\Big)\partial^j + \frac{dQ_{n,0}}{dx} - QQ_{n,0}.\end{aligned}$$

Soit la suite $z_0 = y_0$ et $z_{n+1} = \frac{dz_n}{dx} + z_n(M - QI_n)$, supposons que $z_n = y_n + \sum_{j=0}^{n-1} P_{n,j} y_j$, $P_{n,j}$ scalaires, alors

$$z_{n+1} = \frac{dy_n}{dx} + \sum_{j=0}^{n-1} P_{n,j}\frac{dy_j}{dx} + y_n M + \sum_{j=0}^{n-1} P_{n,j} y_j M + \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\frac{dP_{n,j}}{dx}\Big) y_j - Qy_n - \sum_{j=0}^{n-1} QP_{n,j} y_j$$

soit

$$z_{n+1} = y_{n+1} + (P_{n,n-1} - Q)y_n + \sum_{j=0}^{n-1} \Big(P_{n,j-1} + \frac{dP_{n,j}}{dx} - QP_{n,j}\Big) + \frac{dP_{n,0}}{dx} - QP_{n,0}$$

$P_{n,j}$ et $Q_{n,j}$ satisfont aux mêmes relations de récurrence et $P_{0,0} = Q_{0,0} = 1$ donc $P_{n,j} = Q_{n,j}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall j \le n$.

Si T est telle que

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

alors T est triangulaire d'éléments diagonaux égaux à 1, elle est donc inversible, $(y_0, \ldots, y_{n-1})$ est une famille libre de $(\mathfrak{P}_\mathbb{C})^n$ donc $(z_0, \ldots, z_{n-1})$ est une famille libre de $(\mathfrak{P}_\mathbb{C})^n$: le vecteur $z_0 = y_0$ est cyclique pour la matrice $M - QI_n$.

Soient F l'isomorphisme de $\mathfrak{P}_\mathbb{C}$-espaces vectoriels de $M_n(\mathfrak{P}_\mathbb{C})$ vers $\mathfrak{P}_{\mathbb{C},n}[\partial]$ (sous espace des opérateurs de $\mathfrak{P}_\mathbb{C}[\partial]$ d'ordre inférieur ou égal à n) tel que $F(y_i) = \partial^i$, f l'isomorphisme de $\mathfrak{P}_\mathbb{C}$-espaces vectoriels de $M_n(\mathfrak{P}_\mathbb{C})$ vers lui-même tel que $f(y_i) = z_i$ et g l'isomorphisme de $\mathfrak{P}_\mathbb{C}$-espaces vectoriels de $\mathfrak{P}_{\mathbb{C},n}[\partial]$ vers lui-même tel que $g(\partial^i) = (\partial - Q)^i$ alors $F \circ f = g \circ F$: en effet $g(F(y_i)) = g(\partial^i) = (\partial - Q)^i$ et $F(f(y_i)) = F(z_i)$ et $F(z_i) = (\partial - Q)^i$ car $P_{n,j} = Q_{n,j}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall j \leq n$.

L'opérateur différentiel associé à $M - QI_n$ par le vecteur cyclique $z_0 = y_0$ est $L^* = \partial^n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i^* \partial^i$ où $z_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i^* z_i$ c'est $\partial^n - F \circ f^{-1}(z_n)$. Si l'on remarque que $\partial^i = F \circ f^{-1}(z_i)$ et que l'on utilise la linéarité de $F \circ f^{-1}$ alors $z_n = y_n + \sum_{i=0}^{n-1} P_{n,i} y_i = \sum_{i=0}^{n-1} (c_i + P_{n,i}) y_i$, de l'identité $F \circ f^{-1} = g^{-1} \circ F$ on déduit que $L^* = \partial^n - \sum_{i=0}^{n-1} (c_i + P_{n,i}) g^{-1} \circ F(y_i)$.

$g^{-1}(F(y_i)) = g^{-1}(\partial) = (\partial + Q)^i$

$(\partial - Q)^i = \partial^n + \sum_{i=0}^{n-1} P_{n,i} \partial^i$ d'où

$$\partial^n = (\partial + Q - Q)^n = (\partial + Q)^n + \sum_{i=0}^{n-1} P_{n,i} (\partial + Q)^i.$$

Au bout du compte

$$L^* = \partial^n + (\partial + Q)^n - \partial^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i (\partial + Q)^i = (\partial + Q)^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i (\partial + Q)^i.$$

Soit S le graphe de calcul des exposants formels pour un système de matrice M : ses sommets sont des matrices égales à $M - QI_n$ où $Q = \sum_{i=1}^{s} q_i x^{-r_i}$ $q_i \in \mathbb{C}$ $r_i \in \mathbb{Q}$, si y_o est un vecteur cyclique pour la matrice M lui associant l'opérateur $L = \partial^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \partial^k$ c'est un vecteur cyclique pour la matrice $M - QI_n$ lui associant l'opérateur $L(Q) = (\partial + Q)^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (\partial + Q)^k$. Soit ϕ l'application qui aux sommets de S : $M - QI_n$ associe $L(Q)$, nous définissons alors le graphe : E son ensemble des sommets est $\{\phi(M - QI_n) = L(Q) / M - QI_n \in S\}$, son ensemble des arcs est l'ensemble des arcs notés $\psi(u)$ où $\psi(u)$ joint $\phi(M - Q_1 I_n)$ à $\phi(M - Q_2 I_n)$ $(Q_1 \neq Q_2)$ si et seulement si u joint $M - Q_1 I_n$ à $M - Q_2 I_n$, on associe à $\psi(u)$ le poids $p_2(\psi(u)) = p(u) = (-\alpha/r, x^{-r})$ où $(-\alpha/r, x^{-r})$ est le poids de l'arc u. ψ est une bijection telle que $p_2(\psi(u)) = p(u)$ par définition et ϕ est surjective par définition. Si $L(Q_1) = L(Q_2)$ alors $Q_1 = Q_2$ et donc $M - Q_1 I_n = M - Q_2 I_n$ ce qui prouve que ϕ est injective. Le graphe E est donc équivalent au graphe de calcul des exposants formels de $M - \partial I_n$.

Soit $L(Q)$ un sommet (avec si $Q = 0$ alors $L(Q) = L$) de E, l'ensemble des suivants de $L(Q)$ est par construction vide si le PDN de $M - QI_n$, c.a.d. dire le PDN de $L(Q)$, n'a que des pentes nulles si $Q = 0$ n'a pas de pente positive plus petite que r où $(-\alpha/r, x^{-r})$ est le poids de l'arc qui atteint $L(Q)$; sinon si p est la plus grande pente (positive si $Q = 0$, inférieure à r sinon) du PDN de $M - QI_n$, le PDN de $L(Q)$, l'ensemble des suivants de L est l'ensemble des $L(\alpha x^{-(p+1)}) = L(\frac{d}{dx}(-\alpha/px^{-p}))$ où α est racine de $p(\alpha) = (-1)^n\theta(\alpha/(\beta+1))$, $\theta(\lambda) = 0$ étant l'équation caractéristique associée à p et $\beta + 1 = -p$, cet ensemble est l'ensemble des $L(\frac{d}{dx}(\lambda x^{-p}))$ où λ est racine de $\theta(\lambda)$ polynôme caractéristique associée à p. Dans tout les cas les suivants de $L(Q)$ sont les suivants de $L(Q)$ par l'arborescence de l'algorithme de cassure des pentes du PDN de L, le graphe E est donc cette arborescence. Ce qui prouve que l'arborescence de calcul des exposants formels est finie, l'algorithme converge donc et calcule des invariants.

Mise en œuvre de l'algorithme à l'aide des f.p.c. : pour obtenir le graphe de calcul des exposants formels de M on a besoin de calculer les pentes du PDN de $M - QI_n$ et les racines $S_k(N)_{|x=0}$ où N est f.p.c. et équivalente à $M - QI_n$. Ce qui se ramène au problème suivant trouver N f.p.c. et équivalente à $M - QI_n$: les pentes du PDN de N se lisent alors sur les valuations des colonnes de N et $S_k(N)_{|x=0}$ est un déterminant obtenu de façon élémentaire avec les coefficients de N. On verra dans la suite qu'une matrice f.p.c. est une matrice super-irréductible sur $\mathbb{C}((x^{1/p}))$ pour un bon choix de p. D'un point de vue algorithmique calculer une matrice super-irréductible c'est faire des éliminations de Gauss, mais compliquer la matrice de départ car il faut «descendre» les valuations de certaines colonnes jusqu'à -1 et cette complexité augmente avec la ramification $x \to x^{1/p}$ nécessaire pour obtenir une f.p.c., en apparence on retrouve les objections rencontrées lors de l'algorithme d'Hilali. En fait ces objections seront levées par les résultats qui suivent : on démontrera que le PDNA d'une matrice super-irréductible est son PDN ce qui évitera de faire une ramification fictive pour l'obtenir ; on calculera non des formes super-irréductibles mais partiellement super-irréductibles : à savoir à une étape donnée de l'algorithme nous n'avons besoin de connaître non pas le PDN d'une matrice en entier mais ses k premières pentes. Nous aurons le résultat suivant pour le faire : Soit M à coefficients sur $\mathbb{C}((x))$ et $m_1(M) = q + n_0/n + + n^{q-1}/n_q$, si $(q, n_0, \dots, n_k)$ est minimum (k positif ou nul) pour l'ordre lexicographique alors les pentes du PDNA de M comprises entre q et $q-k-1$ sont celles du PDN de M.

5. Sur et sous p-polygones de Newton

Dans cette partie nous allons nous servir des formes super-irréductibles sur $\mathbb{C}((x^{1/p}))$ pour obtenir deux $\mathbb{C}((x^{1/p}))$-invariants le sur et le sous p-polygone de Newton qui permettent d'encadrer le PDN d'une matrice. Nous allons commencer par faire le lien entre f.p.c. et formes super-irréductibles.

Propriété 5.1. *Soit $M \in M_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))$, si M est f.p.c. alors elle est super-irréductible sur $\mathbb{C}((x^{1/p}))$, si M est super-irréductible sur $\mathbb{C}((x^{1/p}))$ elle est f.p.c. si et seulement si les pentes du PDN de M sont des multiples de $1/p$ par des entiers.*

La propriété est évidente si $v(M)$ est supérieure ou égale à 1, sinon posons $m_p(M) = q + n_0/n + n_1/n^2 + . + n_{q-1}/n^q$. Soient $0 = j_1 < j_2 < \cdots < j_s$ les indices k tels que $n_k \neq 0$ et $\beta_i = -1 - q/p + j_i/p$ alors $s, \beta_1, \ldots, \beta_s, n_{j_1}, \ldots, n_{j_s}$ sont les paramètres de valuation de M si $n_{j_0} = 0$, $j_{s+1} = q$ et si $k > 1$ alors $\sum_{i=0}^{k} n_{j_k}(\beta_k - \beta_i) = \sum_{i=0}^{j_k-1} \frac{j_k - j_i}{p} n_i$, il vient $S_k(M) = T_{j_k-1,p}(M)$.

Supposons M f.p.c. et posons $\mu_p(M) = q^* + n_0^*/n + + n_{q-1}^*/n^q$. Pour montrer que M est super-irréductible il suffit de montrer que $q = q^*$ et $n_{j_i} = n_{j_i}^*$, $i = 1, \ldots, s$. Soit $i \leq s$ nous considérons deux cas :

Premier cas : $j_{i+1} = j_i + 1$ alors $S_{i+1}(M) = T_{j_{i+1}-1,p}(M) = T_{j_i,p}(M)$ et comme M est f.p.c. $v(T_{j_i,p}(M)) = 0$.

Deuxième cas : $j_{i+1} > j_i + 1$ on se sert de $S_i(M)$: posons

$$\det(M - \lambda I_n) = (-1)^n \Big(\lambda^n - \sum_{m=0}^{n} a_m \lambda^m\Big) \text{ et } a = 1/p(j_i n_0 + (j_i - 1)n_1 + \cdots + n_{j_i - 1})$$

et $b = 1 + q/p - j_i/p$, avec ces valeurs de a et b

$$T_{j_i-1,p}(M) = S_i(M) = x^a \det(x^b M - \lambda I_n)$$

et nous savons que $S_i(M)_{|x=0}$ est un polynôme de $\mathbb{C}[\lambda]$ admettant 0 comme racine d'ordre $n - n_{j_1} - \cdots - n_{j_i}$: cela se traduit par $v(a_m) + a + (n - m)b = 0$ en $m = n - n_{j_1} - - n_{j_i}$.

Posons $a' = 1/p((j_i + 1)n_0 + j_i n_1 + + 2n_{j_i - 1} + n_{j_i})$ et $b' = 1 + q/p - (j_h + 1)/p$ en $m = n - n_{j_1} - \cdots - n_{j_i}$ on peut vérifier que

$$v(a_m) + a' + (n - m)b' = v(a_i) + a + (n - m)b = 0$$

mais comme $x^{a'} \det(x^{b'} M - \lambda I_n) = T_{j_i,p}(M)$ cela se traduit par $v(T_{j_i,p}(M)) = 0$.

Nous en déduisons que $n_k = n_k^*$, $k = 0, \ldots, q - 1$ et $q = q^*$. En effet $j_1 = 0$ et de $v(T_{j_1,p}(M)) = 0$ nous déduisons que $q = q^*$ et $n_0 = n_0^*$. Supposons à présent que $q = q^*$, $n_0 = n_0^*$, $n_1 = n_1^*, \ldots, n_k = n_k^*$ avec $k \leq q - 2$ alors si $n_{k+1} = 0$ nécessairement $n_{k+1} = n_{k+1}^*$, sinon de $q = q^*$, $n_0 = n_0^*$, $n_1 = n_1^*, \ldots, n_k = n_k^*$ nous déduisons que $v(T_{0,p}(M)) = v(T_{1,p}(M)) = \cdots = v(T_{k,p}(M)) = 0$ de $n_{k+1} \neq 0$ nous déduisons que $n_{k+1} = n_{j_i}$ pour une valeur de i et de $v(T_{j_i}, p(M)) = 0$ nous en déduisons que $n_{k+1} = n_{k+1}^*$. M est donc super-irréductible.

Supposons que M est super-irréductible et que les pentes du PDN de M sont multiple entier de $1/p$ alors il existe N f.p.c. telle que M et N sont $\mathbb{C}((x^{1/p}))$-équivalentes. N est donc super-irréductible et $\mathbb{C}((x^{1/p}))$-équivalente à M, il s'en suit que puisque les valeurs $q, n_0, \ldots, n_{q-1}$ sont les mêmes pour M et N, M et N ont mêmes paramètres de valuations $s, \beta_1, \ldots, \beta_s, n_{j_1}, \ldots, n_{j_s}$. Soit $k < s + 1$ alors pour les mêmes valeurs de $a \geq 0$ et $b > 1$, $S_k(M) = x^a \det(x^b M - \lambda I_n)$ et $S_k(N) = x^a \det(x^b N - \lambda I_n)$, nous savons trouver deux matrices δ et ϵ diagonales à coefficients rationnels positifs ou nuls telles que $\det(x^\delta) = \det(x^\epsilon) = x^a$, $x^b M x^\delta = O(1)$ et $x^b N x^\epsilon = O(1)$ alors :

$$x^a \det(x^b M - \lambda I_n) = x^a \det(x^b N - \lambda I_n) + O(x^{b-1})$$

ce qui donne $v(S_k(N)) = 0$ et $S_k(M)_{|x=0} = S_k(N)_{|x=0}$; de M f.p.c. nous en déduisons que $S_k(N)_{|x=0}$ est un polynôme de degré $n - n_{j_1} - \cdots - n_{j_{k-1}}$ avec 0 comme racine d'ordre $n - n_{j_1} - \cdots - n_{j_k}$. Comme nous l'avons vu précédemment $S_{s+1}(N)_{|x=0}$ est un polynôme de $\mathbb{C}[\lambda]$ de degré $n - (n_0 + n_{j_1} + \cdots + n_{j_s})$ se déduit de $S_s(N)_{|x=0}$ est un polynôme de $\mathbb{C}[\lambda]$ admettant 0 comme racine d'ordre $n - (n_0 + n_{j_1} + \cdots + n_{j_s})$. Si nous appliquons la propriété de caractérisation des f.p.c. : N est f.p.c.

Supposons que M est super-irréductible et f.p.c. puisque ses coefficients sont à valeur sur $\mathbb{C}((x^{1/p}))$ nous avons vu que cela entraîne que les pentes du PDN de M sont des multiples entiers de $1/p$.

5.1. Le sous p-polygone de Newton Sousp(M, p)

Définition 5.1. Deux matrices N_1 et N_2 à coefficients sur $\mathbb{C}((x^{1/p}))$, $\mathbb{C}((x^{1/p}))$-équivalentes et super-irréductibles ont mêmes paramètres de valuation et donc même polygone des valuations, pour une matrice M quelconque à coefficients sur $\mathbb{C}((x^{1/p}))$, on appelle sous p-polygone de Newton de M (on le note Sousp(M, p)) le polygone des valuations de n'importe qu'elle matrice N : $\mathbb{C}((x^{1/p}))$-équivalente à M et super-irréductible sur $\mathbb{C}((x^{1/p}))$: Sousp(M, p) est un $\mathbb{C}((x^{1/p}))$-invariant différentiel avec les propriétés suivantes :

(i) Soient $M \in M_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))$ et $N \in M_n(\mathfrak{P}_{\mathbb{C}})$, si M est super-irréductible sur $\mathbb{C}((x^{1/p}))$ et $v(N) > -1$ alors les PDN et PDNA de $M + N$ sont inclus dans Sousp(M, p).

(ii) $\forall M \in M_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))$ le PDN de M est inclus dans Sousp(M, p).

Démonstration. (i) : Le PDNA de $M + N$ est inclus dans son polygone des valuation : Sousp$(M + N, p)$ et puisque $v(N) > -1$, M et $M + N$ ont même polygone des valuations, $M + N$ est super-irréductible (car $T_{k,p}(M)_{|x=0} = T_{k,p}(M + N)_{|x=0}$ si $v(N) > -1$ voir [5]) et donc Sousp$(M, p) =$ Sousp$(M + N, p)$.

Soit $T \in Gl_n(\mathfrak{P}_{\mathbb{C}})$ telle que $R = T^{-1}MT - T^{-1}\partial T$ est f.p.c. alors pour un entier p', $T = Px^{\alpha}Q$ où P appartient au groupe multiplicatif $G_1 = \{P \in M_n(\mathbb{C}[x^{1/p'}])/\det P = 1\}$ $\alpha = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et $\alpha_i \in (1/p')\mathbb{Z}$ et Q appartient au groupe multiplicatif

$$G_2 = \{Q \in Gl_n(\mathbb{C}((x^{1/p'})))/Q = Q_0 + O(x^{1/p'}) \text{ et } Q_0 \in Gl_n(\mathbb{C})\}.$$

En écrivant que $T^{-1}\partial T = T^{-1}(\partial PP^{-1})T + Q^{-1}\alpha/xQ + Q^{-1}\partial Q$ il vient :

$T^{-1}(M + N - (\partial PP^{-1}))T = R + Q^{-1}\alpha/xQ + Q^{-1}\partial Q$ puis par passage au déterminant : $\det(M + N - (\partial PP^{-1}) - \lambda I_n) = \det(R + Q^{-1}\alpha/xQ + Q^{-1}\partial Q - \lambda I_n)$ $v(Q^{-1}\alpha/xQ + Q^{-1}\partial Q) \geq -1$ et R est f.pc. donc $R + Q^{-1}\alpha/xQ + Q^{-1}\partial Q$ est f.pc. et son PDNA est le PNDA de R soit le PDN de $M + N$. $v(N - (\partial PP^{-1})) > -1$ et M super-irréductible le PDNA de $M + N - (\partial PP^{-1})$ est inclus dans Sousp(M, p). Comme $M + N - (\partial PP^{-1})$ et $R + Q^{-1}\alpha/xQ + Q^{-1}\partial Q$ ont même PDNA il vient le PDN de $M + N$ est inclus dans Sousp(M, p).

Le point (ii) se déduit de (i) en choisissant M' super-irréductible et $\mathbb{C}((x^{1/p}))$-

équivalente à M et $N = 0$.

5.2. Sur-polygone de Newton, sur p-polygone de Newton

Donnons la définition suivante :

Définition 5.2. Soit $M \in M_n(\mathfrak{P}_{\mathbb{C}})$, ϕ_M sa fonction de valuation, posons $\det(M - \lambda I_n) = (-1)^n \Big(\lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k\Big)$ où $a_n = 1$. Soit $J(M)$ l'ensemble non vide égal à $\{j/0 \leq j \leq n$ et $\phi_M(j) = v(a_j) - j\}$, le sur polygone de Newton de M est l'enveloppe convexe de l'ensemble $\cup_{j \in J(M)} Q(j, v(a_j - j)$. Cet ensemble est contenu dans le PDNA de M, de plus M est f.pc. si et seulement si son sur polygone de valuation est égal à son polygone des valuations.

Démonstration. $J(M) \subset \{0, \ldots, n\}$ donc

$$\bigcup_{j \in J(M)} Q(j, v(a_j - j) \subset \bigcup_{j=0}^{n} Q(j, v(a_j - j)$$

et par passage aux enveloppes convexes il vient : le sur polygone de Newton de M est inclus dans son PDNA. Si M est f.p.c. alors si $s, \beta_1, \ldots, \beta_s, n_1, \ldots, n_s$ sont les paramètres de valuations de M et $n_0 = 0$ les points $J_k(M)$ de coordonnées (x_k, y_k), $k = 0, \ldots, s$ où $x_k = n - (n_0 + \cdots + n_k)$ et $y_k = -n + (1 + \beta_0)n_0 + \cdots + (1 + \beta_k)n_k$ sont les sommets du polygone des valuations de M égal à son PDNA, il suit que si $j = x_k$ $val(a_j) - j = \phi_M(j)$ donc

$$\bigcup_{j \in J(M)} Q(j, v(a_j - j) \supset \bigcup_{k=0}^{s} Q(x_k, y_k)$$

et par passage aux enveloppes convexes le sur polygone de valuation de M contient le polygone des valuations de M, et puisque le polygone des valuations de M ici égal au PDNA de M contient le sur polygone de valuation : il y a égalité entre le polygone et le sur polygone des valuations.

Si le polygone et le sur polygone des valuations d'une matrice M sont égaux, ces deux polygones sont alors égaux au PDNA de M qu'ils encadrent et M est donc f.p.c.

La notion de sur polygone de valuations n'introduit pas d'invariants, dans le cas général, par contre cette notion est intéressante dans le cas où la matrice M vérifie $v(S_k(M)) = 0$ pour tout k, et en particulier si elle est super-irréductible : cas que nous étudions.

Lemme 5.1. *Soit M à coefficients sur $\mathbb{C}((x^{1/p}))$, $s, \beta_1, \ldots, \beta_s, n_1, \ldots, n_s$ les paramètres de valuations de M et $n_0 = 0$, si $v(S_k(M)) = 0$ pour $k = 1, \ldots, s+1$ $S_1(M)_{|x=0}$ est un polynôme de degré n, $S_k(M)_{|x=0}$ est un polynôme de degré au plus égal à $n - n_1 - \cdots - n_{k-1}$, si $k \neq s+1$ alors $S_k(M)_{|x=0}$ est un polynôme admettant 0 comme racine d'ordre au moins égal à $n - (n_0 + \cdots + n_k)$.*

Nous posons $\det(M-\lambda I_n)=(-1)^n\Big(\lambda^n-\sum_{k=0}^{n-1}c_k\lambda^k\Big)$ où $c_n=1$. $S_1(M)$ est le polynôme caractéristique de la matrice $x^{-v(M)}M$, c'est un polynôme de degré n.

Posons $c_i=x^{-v(c_i)}d_i$ où $d_{i|x=0}\neq 0$ alors $S_k(M)_{|x=0}=(-1)^n(P_n^k-\sum_{i=0}^{n-1}P_i^k)$ où $P_i^k=x_{|x=0}^{(v(c_i)-i-y_{k-1})+(1+\beta_k)(i-x_{k-1})}d_{i|x=0}\lambda^i$, et où $(x_k=n-(n_1+\cdots+n_k)$ et $y_k=-n+(1+\beta_1)n_1+(1+\beta_2)n_2+\cdots+(1+\beta_k)n_k)$ $S_k(M)_{|x=0}$ est donc non nul si et seulement si il existe un entier i pour lequel :

$$(v(c_i)-i-y_{k-1})+(1+\beta_k)(i-x_{k-1})=0.$$

Soit i un tel indice : alors le point de coordonnées $(i,v(c_i)-i)$ est situé sur la droite passant par $J_{k-1}(M)$ de coordonnées (x_{k-1},y_{k-1}) et de coefficient directeur $-(1+\beta_k)$. Cette droite est la droite $(J_{k-1}(M),J_k(M))$ -où $J_k(M)$ est le point de coordonnées (x_k,y_k)- si $k\neq s+1$, c'est la droite d'équation $y=y_s$ si $k=s+1$.

Soit $k\neq 1$: si $t>x_{k-1}$ alors $(\phi_M(t)-y_{k-1}+(1+\beta_k)(t-x_{k-1}))>0$. Si $i>x_{k-1}$ le point $(i,v(c_i)-i)$ qui appartient au polygone de valuation de M vérifie donc $v(c_i)-i\geq\phi_M(i)$, il vient alors $(v(c_i)-i-y_{k-1})+(1+\beta_k)(i-x_k)>0$ et par conséquent $P_i^k=0$. Le degré de $S_k(M)$ qui est le plus grand i pour lequel $P_i^k\neq 0$ est donc inférieur ou égal à x_{k-1} soit $n-(n_1+\cdots+n_{k-1})$.

Si $k\neq s+1$: si $t<x_k$ alors $(\phi_M(t)-y_{k-1})+(1+\beta_k)(t-x_{k-1})>0$. Si $i<x_k$ le point $(i,v(c_i)-i)$ appartenant au polygone des valuations de M vérifie l'inégalité $v(c_i)-i\geq\phi_M(i)$ il vient alors $(v(c_i)-i-y_k)+(1+\beta_k)(i-x_k)>0$ et donc $P_i^k=0$. La multiplicité de la racine 0 de $S_k(M)_{|x=0}$ est au moins égale à $x_k=n-(n_1+\cdots+n_k)$ car c'est le plus petit i pour lequel P_i^k est non nul.

Propriété 5.2. *Nous posons à présent $d_k=$ degré de $S_k(M)_{|x=0}$ et o_k l'ordre de la racine 0 de ce polynôme alors*

$$d_1=n=x_0 \text{ et } x_0\geq d_1\geq o_1\geq x_1\geq d_2\geq o_2\geq x_2\geq\cdots\geq d_s\geq o_s\geq x_s\geq d_{s+1}.$$

On peut voir également que soit $d_{k+1}=o_k=x_k$, soit d_{k+1},o_k,x_k sont deux à deux distincts et que dans ce cas, si M est super-irréductible, alors $\beta_{k+1}-\beta_k=1/p$.

Si $d_{k+1}=o_k$ alors de $o_k\geq x_k\geq d_{k+1}$ nous déduisons que $o_k=x_k=d_{k+1}$.

Si $d_{k+1}=x_k$, alors nous avons $S_k(M)_{|x=0}=(-1)^n(P_n^k-\sum_{i=0}^{n-1}P_i^k)$ oú

$$P_i^k=[d_ix^{(v(c_i)-i-y_{k-1})+(i+\beta_k)(i-x_{k-1})}]_{|x=0}\lambda^i$$

$d_{k+1}=x_k$ entraîne que $(P_i^k)_{|x=0}\neq 0$ en $i=x_k$ ceci équivaut à $(v(c_i)-i-y_k)+(1+\beta_k)(i-x_k)=0$ sachant que $i=x_k$ il vient $v(c_i)-i=y_k$. Pour $i=x_k$ la quantité $(v(c_i)-i-y_{k-1})+(1+\beta_k)(i-x_{k-1})$ est donc égale à $(y_k-y_{k-1})+(1+\beta_k)(x_k-x_{k-1})$ si l'on remplace y_k,y_{k-1},x_k,x_{k-1} par leurs valeurs en fonction de $n_1,\ldots,n_s,\beta_1,\ldots,\beta_s$ il vient $(y_k-y_{k-1})+(1+\beta_k)(x_k-x_{k-1})=0$ c'est à dire $P_i^k\neq 0$ si $i=x_k$. Nous en déduisons que $o_k\leq x_k$. Sachant que $x_k\leq o_k$ il vient $x_k=o_k$.

Si $o_k=x_k$ alors on a $(P_i^k)_{|x=0}\neq 0$ pour $i=x_k$. Cela s'écrit $(v(c_i)-i-y_{k-1})+(1+\beta_k)(i-x_{k-1})=0$ où $i=x_k$ soit $v(c_i)-i=y_{k-1}-(1+\beta_k)(x_k-x_{k-1})=y_k$.

Pour $i = x_k$ la quantité $(v(c_i) - i - y_k) + (1 + \beta_k)(i - x_k)$ est donc nulle. Il vient $P_i^{k+1} \neq 0$ si $i = x_k$ donc $x_k \leq d_{k+1}$ sachant que $d_{k+1} \leq x_k$ il vient $x_k = d_{k+1}$.

Nous posons $m_p(M) = q + m_0/n + \cdots + m_{q-1}/n^q$, si $0 = j_1 < \cdots < j_s$ sont les indices j tels que $m_j \neq 0$ alors en posant $j_{s+1} = q$ on a $\beta_k = -1 - q/p + j_k/p$ où $1 \leq k \leq s+1$, $n_k = m_{j_k}$ où $1 \leq k \leq s$, $S_k(M) = T_{j_k-1,p}(M)$, où $2 \leq k \leq s+1$, et $S_1(M) = \det(x^{1+q/p}M - \lambda I_n)$.

Soit $h \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$. Nous posons $a = 1/p\{(h+1)m_0 + hm_1 + \cdots + m_h\}$ et $b = 1 + q/p - (h+1)/p$ et nous appelons k l'unique entier tel que $j_k \leq h < j_{k+1}$ avec cette définition de k il vient

$$a = 1/p\{(h+1-j_1)m + (h+1-j_2)m + \cdots + (h+1-j_k)m\}$$

soit

$$a = ((h+1)/p - q/p)(m_{j_1} + \cdots + m_{j_k}) + (q/p - j1/p)m_{j_1} + \cdots + (q/p - jk/p)m_{j_k}.$$

Mais $\forall k \ \ -1 - \beta_k = q/p - j_k/p$, $\phi_M(x_k) = -n + (1+\beta_1)n_1 + \cdots + (1+\beta_k)n_k$, $n_k = m_{j_k}$, donc il vient $a = ((h+1)/p - q/p)(n - x_k) - \phi_M(x_k) - n$.

$T_{h,p}(M)$ étant égal à $x^a \det(x^b M - \lambda I_n)$ et $v(T_{h,p}(M)) = 0$ on en déduit que $v(c_i) + a + (n-i)b \geq 0 \ \forall i \in \{0, \ldots, n\}$, $\exists i \in \{0, \ldots, n\}$ $v(c_i) + a + (n-i)b = 0$. En remplaçant a,b par leurs valeurs on a $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$:

$$v(c_i) - i + (x_k - i)(q/p - (h+1)/p) - \phi_M(x_k) \geq 0$$

et

$$\exists i \in \{0, \ldots, n\} \ v(c_i) - i + (x_k - i)(q/p - (h+1)/p) - \phi_M(x_k) = 0$$

k étant l'entier tel que $j_k \leq h < j_{k+1}$ tout les points de coordonnées $(i, v(c_i) - i)$ sont au dessus de la droite Δ_h de pente $q/p - (h+1)/p$ passant par $J_k(M)$ de coordonnées $(x_k, \phi_M(x_k))$. L'un de ces points est sur la droite Δ_h. Supposons que $\beta_k - \beta_{k+1} \geq 2/p$ il vient donc $j_{k+1} - j_k \geq 2$. Soit $h = j_k$ alors $j_k < h+1 < j_{k+1}$ et $-(1 + \beta_{k+1}) = q/p - j_{k+1}/p < q/p - (h+1)/p < q/p - j_k/p = -(1+\beta_k)$.

Le polygone des valuations de M contient un segment de pente $-(1+\beta_{k+1})$ passant par $J_k(M)$ et un segment de pente $-(1+\beta_k)$ passant par $J_k(M)$, c'est un convexe, la droite Δ_h de pente $q/p - (h+1)/p$ ne peut couper ce polygone qu'en $J_k(M)$. Or nous savons – de $v(T_{h,p}(M)) = 0$ – que pour au moins un indice i le point de coordonnées $(i, v(c_i) - i)$ est sur Δ_h, nécessairement ce point est $J_k(M)$. Il vient : $\exists i$ tel que $J_k(M)$ soit de coordonnées $(i, v(c_i) - i)$ ce qui donne $(i, v(c_i) - i) = (x_k, \phi_M(x_k))$ et donc si $i = x_k$ le terme en λ^i de $S_k(M)_{|x=0}$ est différent de 0. L'ordre o_k de multiplicité de la racine 0 de $S_k(M)_{|x=0}$ vérifie donc $o_k \leq x_k$, nous savons que $o_k \geq x_k$ il vient alors $o_k = x_k$, c'est à dire $o_k = x_k = d_{k+1}$.

Soit j un élément de $J(M)$ alors $v(c_j) - j = \phi_M(j)$, comme $\phi_M(t) = y_s$ si $t \leq x_s$ et $(\phi_M(t) - y_{k-1}) + (1+\beta_k)(t - x_{k-1}) = 0$ si $x_k \leq t \leq x_{k-1}$ il vient $v(c_j) - j = y_s$ si $j \leq x_s$ et $(v(c_j) - j - y_{k-1}) + (1+\beta_k)(j - x_{k-1}) = 0$ si $x_k \leq j \leq x_{k-1}$.

Si nous appelons $V_k(M)$ $(k = 1, \ldots, s)$ et $D_k(M)$ $(k = 1, \ldots, s+1)$ les points de coordonnées $(o_k, \phi_M(o_k))$ et $(d_k, \phi_M(d_k))$, alors comme o_k et d_k sont les plus petits et plus grands j tels que soit $v(c_j) - j = y_s$ si $j \leq x_s$ soit

$$(v(c_j) - j - y_{k-1}) + (1 + \beta_k)(j - x_{k-1}) = 0$$

si $x_k \leq j \leq xk - 1$ (car choisis comme valuations et degrés de $S_k(M)_{|x=0}$) le point de coordonnées $(j, v(c_j) - j)$ est soit sur la demi-droite horizontale passant par $D_{s+1}(M)$ et à droite de $D_{s+1}(M)$, soit sur le segment $[V_k(M), D_k(M)]$ inclus dans le segment $[J_k(M), J_{k-1}(M)]$ ($k = 1, \dots, s$) de pente multiple entier de $1/p$, il suit que le sur polygone des valuations de M est l'enveloppe convexe de $(\cup_{k=1}^{s+1} Q(d_k, \phi_M(d_k))) \cup (\cup_{k=1}^{s} Q(o_k, \phi_M(o_k)))$ c'est un polygone de sommets $D_{s+1}(M), V_s(M), D_s(M), \dots, V_1(M), D_1(M) = (n - n)$.

Supposons à présent M super-irréductible sur $\mathbb{C}((x^{1/p}))$ alors soit $V_k(M) = J_k(M) = D_{k+1}(M)$ ($k = 1, \dots, s$) soit $D_{k+1}(M)$, $J_k(M)$, $V_k(M)$ sont deux à deux distincts et les pentes des segments $[D_{k+1}(M), J_k(M)]$ et des segments $[J_k(M), V_k(M)]$: pentes des segments $[J_{k+1}(M), J_k(M)]$ et $[J_k(M), J_{k-1}(M)]$, sont des multiples entiers de $1/p$ qui diffèrent de $1/p$. Le PDNA de M encadré par son sous polygone des valuations de sommets $J_k(M)$ et le sur polygone des valuations de sommets $D_{s+1}(M), V_s(M), D_s(M), \dots, V_1(M), D_1(M) = (n - n)$ a sa frontière qui passe par les segments $[V_k(M), D_k(M)]$ qui, si $V_k(M) \neq D_k(M)$, est un segment non dégénéré de pente multiple entier de $1/p$, et dans les triangles $(D_{k+1}(M), J_k(M), V_k(M))$. Dans le cas où $D_{k+1}(M), J_k(M), V_k(M)$ sont deux à deux distincts il n' y a pas de points du PDNA sur les segments $]D_{k+1}(M), J_k(M)]$ et les segments $[J_k(M), V_k(M)[$ (car dans le cas contraire il existe un j tel que $v(c_j) - j = \phi_M(j)$ avec $d_{k+1} < j \leq x_k$ ou $x_k \leq j < o_k$ ce qui est impossible par construction), la frontière du PDNA de M passe par le triangle $(D_{k+1}(M), J_k(M), V_k(M))$ sans passer par les segments $]D_{k+1}(M), J_k(M)]$ et les segments $[J_k(M), V_k(M)[$ de pente h/p et $(h + 1)/p$ où $h$est un entier, par convexité les pentes p_m de la partie du PDNA de M qui passe par le triangle $(D_{k+1}(M), J_k(M), V_k(M))$ verifient $h/p < p_m < (h + 1)/p$. Les points $D_k(M)$ ($k = 1, \dots, s + 1$) et $V_k(M)$ ($k = 1, \dots, s$) sont des points de discontinuité des pentes du PDNA de M ce sont donc des sommets du PDNA de M.

Propriété 5.3. *Soit M super-irréductible sur $\mathbb{C}((x^{1/p}))$ et $N \in M_n(\mathfrak{P}_{\mathbb{C}})$ avec $v(N) > -1$ alors M et $M + N$ ont même sur polygone des valuations.*

Soient a_k et $b_k \geq 1$ les rationnels positifs tels que

$$S_k(M) = x^{a_k} \det(x^{b_k} M - \lambda I_n)$$

alors

$$S_k(M + N) = x^{a_k} \det(x^{b_k}(M + N) - \lambda I_n).$$

Nous savons trouver une matrice ϵ_k diagonale à coefficients rationnels positifs telle que $x^{a_k} = \det(x^{\epsilon_k})$ et $x^{b_k} M x^{\epsilon_k} = O(1)$ il vient $S_k(M + N) = \det(x^{b_k} M x^{\epsilon_k} - \lambda x^{\epsilon_k} + x^{b_k} N x^{\epsilon_k})$, cela donne $S_k(M + N) - S_k(M) = O(x^{1+v(N)})$. Sachant que $v(S_k(M)) = 0$ il vient $v(S_k(M + N)) = 0$ et $S_k(M + N)_{|x=0} = S_k(M)_{|x=0}$, le sur polygone de M est défini par la donnée de $s, \beta_1, \dots, \beta_s, n_1, \dots, n_s$ et par la donnée des degrés et ordres de multiplicité de la racine 0 des polynômes $S_k(M)_{|x=0}$. Il vient donc que les sur polygones de Newton de M et $M+N$ sont égaux.

Comme précédemment les points $D_k(M)$ $(k = 1,\ldots,s+1)$ et $V_k(M)$ $(k=1,\ldots,s)$ sont donc des sommets du PDNA de $M+N$ dont les pentes multiples entiers de $1/p$ sont les pentes des segments $[V_k(M), D_k(M)]$ où $V_k(M) \neq D_k(M)$ et les pentes non multiples entiers de $1/p$ passent par les triangles $(D_{k+1}(M),$ $J_k(M), V_k(M))$ sans passer par les segments $]D_{k+1}(M), J_k(M)]$ et les segments $[J_k(M), V_k(M)[$, où $D_{k+1}(M), J_k(M), V_k(M)$ sont deux à deux distincts.

Nous avons montré précédemment que le PDN de $M+N$ est le PDNA de $M+N-(\partial P P^{-1})$ où P appartient au groupe multiplicatif

$$G_1 = \{P \in M_n(\mathbb{C}[x^{1/p'}])/\det P = 1\}$$

et p' entier, $N-(\partial P P^{-1}) = N'$ avec $v(N') > -1$, nous en déduisons que les points $D_k(M)$ $(k=1,\ldots,s+1)$ et $V_k(M)$ $(k=1,\ldots,s)$ sont donc des sommets du PDN de $M+N$ dont les pentes multiples entiers de $1/p$ sont les pentes des segments $[V_k(M), D_k(M)]$ où $V_k(M) \neq D_k(M)$ et les pentes non multiples entiers de $1/p$ passent par les triangles $(D_{k+1}(M), J_k(M), V_k(M))$ sans passer par les segments $]D_{k+1}(M), J_k(M)]$ et les segments $[J_k(M), V_k(M)[$, où $D_{k+1}(M)$, $J_k(M)$, $V_k(M)$ sont deux à deux distincts.

Si l'on choisit $N=0$ alors les points $D_k(M)$ $(k = 1,\ldots,s+1)$ et $V_k(M)$ $(k = 1,\ldots,s)$ sont donc des sommets du PDN de M : ce sont des invariants différentiels, il en résulte que le sur polygone de valuation de deux matrices N_1 et N_2 super-irréductibles sur $\mathbb{C}((x^{1/p}))$ et équivalentes sont égaux.

Définition 5.3. Pour toute matrice M dans $M_n(\mathbb{C}((x^{1/p}))$ on appelle sur p-polygone de Newton, noté $\mathrm{Surp}(M,p)$, le sur polygone de valuation commun à toute matrice N super-irréductible et $\mathbb{C}((x^{1/P}))$-équivalente à M : c'est un $\mathbb{C}((x^{1/p}))$-invariant contenu dans le PDN de M.

6. Polygone de Newton algébrique d'une matrice super-irréductible, algorithme de cassure des pentes du polygone de Newton

Définition 6.1. Soit $M \in M_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))$ avec

$$m_p(M) = q + n_0/n + \cdots + n_{q-1}/n^q$$

k un entier tel que $0 \leq k < q-1$ et $\mu_p(M) = q^* + n_0^*/n + \cdots + n_{q-1}^*/n^q$ M sera dite k-réduite si $q = q^*$, $n_i = n_i^*$ pour $i \leq k$ et $n_{k+1} > n_{k+1}^*$, on conviendra de dire qu'elle est q-réduite si elle est super-irréductible.

Soient $0 = j_1 < j_2 < \cdots < j_s$ les indices r tels que $n_r \neq 0$, convenons de plus que $j_{s+1} = q$, soient $\beta_i = -1 - q/p + j_i/p$ alors $s, \beta_1, \ldots, \beta_s, n_1, \ldots, n_s$ sont les paramètres de valuation de M.

Soit $0 \leq k \leq q-1$, dans ce qui suit nous supposons M k-réduite et appelons i le plus grand indice tel que $j_i \leq k$ de sorte que $j_i \leq k < j_{i+1}$ alors les i premières pentes du polygone des valuations de M sont les i premières pentes de $\mathrm{Sousp}(M,p)$.

Soit N super-irréductible et $\mathbb{C}((x^{1/p}))$-équivalente à M, soit $t \leq i+1$, $b_t = -1-q/p+j_t/p$ et $a_t = \sum_{r=0}^{t} n_{j_r}(\beta_t-\beta_r) \geq 0$ où on convient que $n_{j_0}=0$; si $i+1 < s+1$ alors $b_t < -1$ et puisque les i premières pentes du polygone des valuations de M sont les i premières pentes de $\mathrm{Sousp}(M,p)$ alors, pour les mêmes valeurs de a_t et b_t $S_t(M) = x^{a_t}\det(x^{-b_t}M-\lambda I_n)$ et $S_t(N) = x^{a_t}\det(x^{-b_t}N-\lambda I_n)$, nous savons trouver deux matrices δ_t et ϵ_t diagonales à coefficients rationnels positifs ou nuls telles que $\det(x^{\delta_t}) = \det(x^{\epsilon_t}) = x^{a_t}$ $x^{-b_t}Mx^{\delta_t} = O(1)$ et $x^{-b_t}Nx^{\epsilon_t} = O(1)$ nous en déduisons que : $x^{a_t}\det(x^{-b_t}M-\lambda I_n) = x^{a_t}\det(x^{-b_t}N-\lambda I_n)+O(x^{-b_t-1})$ d'où il vient $S_t(M)_{|x=0} = S_t(N)_{|x=0}$ et donc

$$D_1(M)=D_1(N), V_1(M)=V_1(N), \ldots, D_{i+1}(M)=D_{i+1}(N), V_{i+1}(M)=V_{i+1}(N).$$

$\mathrm{Surp}(M,p)$ et le sur polygone des valuations de M coïncident pour les abscisses supérieures à celle de $V_{i+1}(M)$ soit o_{i+1} ; si $i+1 = s+1$ alors $q=q^*$, $n_0 = n_0^*, \ldots, n_k = n_k^*$ et $n_{k+1} = n_{k+2} = \cdots = n_{q-1} = 0$ M est nécessairement super-irréductible et son sur polygone des valuations est $\mathrm{Surp}(M,p)$. Donc M est super-irréductible ou à partir de l'abscisse $x_i = n - n_{j_1} - \cdots - n_{j_i}$: le sur polygone des valuations de M et $\mathrm{Surp}(M,p)$ coïncident, le polygone des valuations de M et $\mathrm{Sousp}(M,p)$ coïncident.

Nous avons montré précédemment que le PDN de M est le PDNA de $M+N'$ avec $v(N') > -1$. Soit $t \leq i$ alors pour les mêmes valeurs de a_t et b_t $x^{a_t}\det(x^{-b_t}M-\lambda I_n) = S_t(M)$, $x^{a_t}\det(x^{-b_t}(M+N')-\lambda I_n) = S_t(M+N')$, nous savons trouver deux matrices δ_t et ϵ_t diagonales à coefficients rationnels positifs ou nuls telles que $\det(x^{\delta_t}) = \det(x^{\epsilon_t}) = x^{a_t}$, $x^{-b_t}Mx^{\delta_t} = O(1)$ et $x^{-b_t}Nx^{\epsilon_t} = O(1)$ nous en déduisons que :

$$x^{a_t}\det(x^{-b_t}M-\lambda I_n) = x^{a_t}\det(x^{-b_t}(M+N')-\lambda I_n)+O(x^{-b_t-1}).$$

Si $D_t(M) \neq V_t(M)$ alors $\mathrm{Surp}(M,p)$ et $\mathrm{Sousp}(M,p)$ ont une frontière commune portée par le segment $[V_t(M), D_t(M)]$ qui porte donc la frontiére du PDNA de M et du PDN de M. Si $D_{t+1}(M), I_t(M), V_t(M)$ sont deux à deux distincts alors il existe h entier tel que la pente de $[D_{t+1}(M), I_t(M)]$ est h/p et la pente de $[I_t(M), V_t(M)]$ est $(h+1)/p$. On appelle d_t, x_t, v_t les abscisses respectives de $D_{t+1}(M), J_t(M), V_t(M)$ et y_d l'ordonnée de $D_{t+1}(M)$; $J_t(M)$ et $V_t(M)$ ont alors pour ordonnées respectives :

$$y_d + (h/ip)(x_t-d_t) \text{ et } y_d + (h/ip)(x_t-d_t) + ((h+1)/ip)(v_t-x_t)$$

et Δ la distance entre un point H situé sur le segment $[D_{t+1}(M), I_t(M)]$ ou sur le segment $[I_t(M), V_t(M)]$ et un point B de même abscisse situé sur le segment $[D_{t+1}(M), V_t(M)]$ est maximum en $H = J_t(M)$ et vaut $\Delta_t = \frac{1}{p}\frac{(v_t-x_t)(x_t-d_t)}{v_t-d_t}$, on pose $X = v_t - x_t$ et $Y = x_t - d_t$, alors $\Delta_t = \frac{1}{p}\frac{XY}{X+Y} \leq \frac{1}{p}\frac{X+Y}{4} = \frac{v_t-d_t}{4p} \leq n/4p$.

La relation $x^{a_t}\det(x^{-b_t}M-\lambda I_n) = x^{a_t}\det(x^{-b_t}(M+N')-\lambda I_n)+O(x^{-b_t-1})$ indique que deux points de même abscisse de la frontière du PDNA de M et du PNDA de $M+N'$ (le PDN de M) sont soit égaux ou sont de distance supérieure ou égale à b_t–1; deux tels points sont astreints à passer par les segments $[V_t(M)$,$D_t(M)]$ ou par les triangles $(D_{t+1}(M), J_t(M), V_t(M))$ donc si $b_t - 1 > \Delta_t$ pour tout t ces deux points ne peuvent être qu'égaux et la frontière du PDNA de M et du PDNA de $M + N'$ (le PDN de M) sont confondues au delà de l'abscisse x_i si $i < s$, entièrement confondus si M est super-irréductible.

Une condition suffisante pour que $b_t - 1 > \Delta_t$ pour tout t est

$$\text{si } i < s \;\; 1 + q/p - j_i/p - 1 > n/4p \text{ soit } (q - j_i) > n/4$$

et si M est super-irréductible c'est $1 + q/p - j_s/p1 > n/4p$ soit $(q - j_s) > n/4$.

Lemme 6.1. *Soit $M \in M_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))$ et M k-réduite (resp. super-irréductible), soient $s, \beta_1, \dots, \beta_s, m_1, \dots, m_s$ les paramètres de valuation de M et j_i définis par $\beta_i = -1 - q/p + j_i/p$ (où $v(M) = -1 - q/p$), on pose de plus $j_{s+1} = q$ nous appelons i_0 l'entier tel que $j_{i_0} \le k < j_{i_0+1}$.*

Sous la condition suffisante $(q - j_{i_0}) > n/4$ (resp. $(q - j_{i_s}) > n/4$) alors le PDN de M et le PDNA de M sont confondus au delà de l'abscisse $x_{i_0} = n - m_1 - \dots - m_{i_0}$ (resp. sont égaux).

Si cette condition suffisante n'est pas respectée alors nous considérons $x^{-h}M$ où h est un entier «assez grand» et comparons le PDN de $x^{-h}M$ à celui de M.

Soit M une matrice sur un corps K et un vecteur e de K^n, considérons le plus grand entier p tel que $e, Me, \dots, M^{p-1}e$ soit un système libre, alors l'espace vectoriel engendré par $e, Me, \dots, M^{p-1}e$ est stable par l'application linéaire $f/f(e) = Me$ et de dimension p, on dit que cet espace est invariant cyclique et que e est cyclique pour cet espace. Dans la base $e, Me, \dots, M^{p-1}e$, appelée base cyclique de I associée à e, d'un sous espace invariant cyclique I l'application f a pour matrice la matrice compagnon C de dernière ligne $(c_0, \dots, c_{p-1})$ où les c_i sont tels que $M^p e = \sum_{i=0}^{p-1} c_i M^i e$. La théorie des diviseurs élémentaires (cf. [11]) montre que $K^n = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_s$ où $I_1, I_2, \dots, I_s$ sont cycliques invariants. Si e_j est un vecteur cyclique de I_j alors si T est la matrice de passage de la base B union des bases cycliques de I_j associées à e_j alors $T^{-1}MT = \operatorname{diag}(C_1, C_2, \dots, C_s)$ où chaque C_j est une matrice compagnon. Soit à présent $K = \mathbb{C}((x^{1/p}))$, B une telle base pour M et T sa matrice de passage alors :

$$T^{-1}x^{-h}MT - T^{-1}\partial(T) = \operatorname{diag}(x^{-h}C_1, \dots, x^{-h}C_s) + O(x^v) \text{ où } v = \operatorname{val}(T^{-1}\partial(T)).$$

Considérons le cas où $\det(M) \neq 0$:

Le PDN de $x^{-h}M$ est donc le PDN de $N = \operatorname{diag}(x^{-h}C_1, \dots, x^{-h}C_s) + O(x^v)$ pour chaque C_i nous savons qu'il existe une matrice γ_i à coefficients rationnels telle que $x^{-\gamma_i}C_i x^{\gamma_i} - \gamma_i/x$ est f.p.c., soit $\gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s)$ alors

$$x^{-\gamma}Nx^{\gamma} - \gamma/x = \operatorname{diag}(x^{-\gamma_1}x^{-h}C_1x^{\gamma_1} - \gamma_1/x, \dots, x^{-\gamma_s}x^{-h}C_sx^{\gamma_s} - \gamma_s/x) + O(x^w)$$

oú $w = v + \min_{i,j}(\gamma_i - \gamma_j)$.

Remarquons que si $s_i, \beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,s_i}, n_{i,1}, \dots, n_{i,s_i}$ sont les paramètres de valuation de $x^{-\gamma_i}C_i x^{\gamma_i} - \gamma_i/x$ alors $s_i, -h + \beta_{i,1}, \dots, -h + \beta_{i,s_i}, n_{i,1}, \dots, n_{i,s_i}$ sont les paramètres de valuation de $x^{-\gamma_i}x^{-h}C_ix^{\gamma_i}-\gamma_i/x$ (ceci est vrai **car** C_i **est inversible**) qui est f.p.c. (il suffit de considérer la propriété de caractérisation des f.p.c. pour le voir) il suit que

$$\mathrm{diag}(x^{-\gamma_1}x^{-h}C_1x^{\gamma_1}-\gamma_1/x,\dots,x^{-\gamma_s}x^{-h}C_sx^{\gamma_s}-\gamma_s/x)$$

est f.p.c. de paramètres de valuation $s,-h+\beta_1,\dots,-h+\beta_s,n_i,\dots,n_s$ où $s,\beta_1,\dots,\beta_s,n_1,\dots,n_s$ sont les paramètres de valuation de $\mathrm{diag}(x^{-\gamma_1}C_1x^{\gamma_1}-\gamma_1/x,\dots,x^{-\gamma_s}C_sx^{\gamma_s}-\gamma_s/x)$ (il suffit de considérer la propriété de caractérisation des f.p.c. pour le voir).

Choisissons à présent $-h<w$ alors $x^{-\gamma}Nx^{\gamma}-\gamma/x$ a mêmes paramètres de valuation que $\mathrm{diag}(x^{-\gamma_1}x^{-h}C_1x^{\gamma_1}-\gamma_1/x,\dots,x^{-\gamma_s}x^{-h}C_sx^{\gamma_s}-\gamma_s/x)$ soient $s,h+\beta_1,\dots,h+\beta_s,n_i,\dots,n_s$ (ceci découle du fait que chaque colonne de $x^{-\gamma_i}x^{-h}C_ix^{\gamma_i}-\gamma_i/x$ est de valuation inférieure à $-h$ et que nous ajoutant à ces colonnes des colonnes de valuation w).

Soit ϵ_k diagonale à coefficients rationnels positifs telle que :

$$S_k(\mathrm{diag}(x^{-\gamma_1}x^{-h}C_1x^{\gamma_1}-\gamma_1/x,\dots,x^{-\gamma_s}x^{-h}C_sx^{\gamma_s}-\gamma_s/x))$$
$$=\det(x^{-(\beta_k-h)}\mathrm{diag}(x^{-\gamma_1}x^{-h}C_1x^{\gamma_1}-\gamma_1/x,...,x^{-\gamma_s}x^{-h}C_sx^{\gamma_s}-\gamma_s/x)x^{\epsilon_k}-\lambda x^{\epsilon_k})$$

alors

$$\begin{aligned}&S_k(x^{-\gamma}Nx^{\gamma}-\gamma/x)\\&=\det(x^{-(\beta_k-h)}\mathrm{diag}(x^{-\gamma_1}x^{-h}C_1x^{\gamma_1}-\gamma_1/x,\dots,x^{-\gamma_s}x^{-h}C_sx^{\gamma_s}-\gamma_s/x)x^{\epsilon_k}\\&\qquad-\lambda x^{\epsilon_k}+O(x^{-\beta_k+h+w}))\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que :

$$\begin{aligned}&S_k(x^{-\gamma}Nx^{\gamma}-\gamma/x)\\&=S_k(\mathrm{diag}(x^{-\gamma_1}x^{-h}C_1x^{\gamma_1}-\gamma_1/x,\dots,x^{-\gamma_s}x^{-h}C_sx^{\gamma_s}-\gamma_s/x))+O(x^{w+h})\end{aligned}$$

ce qui entraîne que $x^{-\gamma}Nx^{\gamma}-\gamma/x$ est f.p.c. de paramètres $s,h+\beta_1,\dots,h+\beta_s,n_1,\dots,n_s$ en utilisant la propriété de caractérisation des f.p.c.

Il vient : les pentes du PDN de $x^{-h}M$ sont égales au pentes du PDNA de $\mathrm{diag}(x^{-\gamma_1}C_1x^{\gamma_1}-\gamma_1/x,\dots,x^{-\gamma_s}C_sx^{\gamma_s}-\gamma_s/x)$ auxquelles on ajoute h, mais cette dernière matrice f.p.c. a même PDNA que $\mathrm{diag}(x^{-\gamma_1}C_1x^{\gamma_1},\dots,x^{-\gamma_s}C_sx^{\gamma_s})$ qui a même PDNA que $\mathrm{diag}(C_1,\dots,C_s)$ qui a même PDNA que M.

Nous avons montré que pour toute matrice M inversible et h assez grand le PDN de $x^{-h}M$ se déduit du PDNA de M en ajoutant h aux pentes du PDNA de M.

Considérons le cas où $\det(M)\neq 0$:

Soit $z\in\mathfrak{P}_{\mathbb{C}}$ non nul et soit $T=zI_n$ alors pour tout $h>0$ $T^{-1}(x^{-h}M)T-T^{-1}\partial T=x^{-h}(M-x^h\frac{dz/dx}{z})I_n$. Posons $\det(M-\lambda I_n)=(-1)^n(\lambda^n-\sum_{i=1}^{n-1}a_i\lambda^i)$

alors

$$\begin{aligned}
\det\Big(M - x^h\frac{dz/dx}{z}I_n - \lambda I_n\Big) &= (-1)^n\Big(\Big(\lambda + x^h\frac{dz/dx}{z}\Big)^n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\Big(\lambda + x^h\frac{dz/dx}{z}\Big)^i\Big)\\
&= (-1)^n\Big(\lambda^n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\lambda^i\Big) + 0(x^h)\\
&= \det(M - \lambda I_n) + 0(x^h).
\end{aligned}$$

Pour former le PDNA de $M - x^h\frac{dz/dx}{z}$ les termes $a_i\lambda^i$ apportent contribution $Q(i, v(a_i) - i)$ et $0(x^h)$ la contribution $Q(i, h - i)$ qui devient négligeable si $h > h_0 = \max(v(a_i))_{1\leq i\leq n-1}$. Si $h > h_0$ $M - x^h\frac{dz/dx}{z}$ et M ont même PDNA. Il existe une valeur $h_1 \geq h_0$ à partir de laquelle le PDN de $x^{-h}\big(M - x^h\frac{dz/dx}{z}\big)$ inversible a pour pentes celles du PDNA de $M - x^h\frac{dz/dx}{z}$ ajoutées de h. D'autre part il est toujours possible de choisir $h > h_1$ et z pour que $M - x^h\frac{dz/dx}{z}$ soit inversible. Pour de telles valeurs de h et z, le PDN de $x^{-h}\big(M - x^h\frac{dz/dx}{z}\big)$ inversible a pour pentes celles du PDNA de $M - x^h\frac{dz/dx}{z}$ ajoutées de h, le PNDA de M est le PDNA de $M - x^h\frac{dz/dx}{z}$, et le PDN de $x^{-h}(M - x^h\frac{dz/dx}{z})$ est le PDN de M (ces matrices sont èquivalentes). Nous concluons :

Propriété 6.1. *Pour toute matrice M et h assez grand le PDN de $x^{-h}M$ se déduit du PDNA de M en ajoutant h aux pentes du PDNA de M.*

Soit M k-réduite considérons $x^{-h}M$ alors $x^{-h}M$ est également k-réduite si h est positif (en effet $T_{i,p}(M) = T_{i,p}(x^{-h}M)$) et si $v(M) = -(1 + q/p)$ alors $v(x^{-h}M) = -1 - (q + hp)/p$. Choisissons $h > h_1$ où h_1 est la valeur de h à partir de laquelle la Proposition 6.1 est vraie, si $s, \beta_1, \ldots, \beta_s, n_{j_1}, \ldots, n_{j_s}$ sont les paramètres de valuation de M alors $s, h + \beta_1, \ldots, h + \beta_s, n_{j_1}, \ldots, n_{j_s}$ sont les paramètres de valuation de $x^{-h}M$. Si i est le plus grand indice tel que $j_i \leq k$ et si $(q+ph-j_i) > n/4$ alors nous savons que la frontière du PDNA et du PDN de $x^{-h}M$ sont confondues au dela de l'abscisse x_i. Choisissons h tel que $(q + ph - j_i) > n/4$ alors les pentes du PDNA de $x^{-h}M$ sont les pentes du PDNA de M ajoutées de h : pour le voir il suffit de considérer :

$$\det(M - \lambda I_n) = (-1)^n\Big(\lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\lambda^k\Big)$$

et

$$\det(x^{-h}M - \lambda I_n) = (-1)^n\Big(\lambda^n \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{h(i-n)}\lambda^i\Big)$$

les pentes du PDN de $x^{-h}M$ sont les pentes du PDN de M ajoutées de h. On en déduit que la frontière du PDNA et du PDN de M sont confondues au delà de l'abscisse x_i.

Si M est super-irréductible $x^{-h}M$ n'est pas nécessairement super-irréductible mais k-réduite jusqu'à l'ordre k où $k = j_s$, comme précédemment on en déduit que la frontière du PDNA et du PDN de M sont confondues au delà de l'abscisse x_s, en deça de l'abscisse x_s le sur et le sous p-polygones de Newton de M sont confondus et de pentes nulles, les propriétés d'inclusion dans les sur et les sous p-polygones de Newton de M assurent alors que le PDN de M est le PDNA de M sont égaux. Nous résumons ces résultats :

Théorème du douanier. *Soit $M \in M_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))$ avec $m_p(M) = q + n_0/n + + n_{q-1}/n^q$, k-réduite sur $\mathbb{C}((x^{1/p}))$ de paramètres de valuations $s, \beta_1, \ldots, \beta_s$, $n_{j_1}, \ldots, n_{j_s}$ (où les j_i sont les indices t tels que $n_t \neq 0$) si i est le plus grand indice tel que $j_i \leq k$ alors le PDN et le PDNA de M sont de frontières confondues à partir de l'abscisse $x_i = n - n_{j_1} - \cdots - n_{j_s}$. Si M est super-irréductible le PDN de M est le PDNA de M.*

Cette proposition permet de simplifier les algorithmes de calcul des exposants formels d'un système en n'utilisant que des matrices partiellement irréductibles et surtout sans ramifications supplémentaires que celles nécessaires aux étapes M devient $M - \lambda x^{-r}$ de cet algorithme. Détaillons cet algorithme : soit $M \in M_n(\mathbb{C}((x^{1/p})))$ nous calculons une forme 0-réduite et équivalente à M soit M_0 puis nous calculons le polynôme caractéristique de M_0 ce qui permet d'obtenir les pentes du PDNA de M_1 et si v_0 est la valuation de M_0 les plus grandes pentes du PDN de M_0 qui sont soit $v_0 - 1$ soit *toutes* les pentes comprises entre $v_0 - 1$ et $v_0 - 1 - 1/p$ (non inclus) si p_1 est l'une de ces pentes nous sommes conduit à changer M_0 en $M_1 - \alpha x^{-p_1 - 1}$ où M_1 est équivalente à M_0, l'algorithme pour le faire est le suivant : se placer sur le corps $\mathbb{C}((x^{1/kp}))$ où p_1 est multiple entier de 1/kp (ramification introduite par p_1) dans l'ordre des pentes p_1 est la $r^{\text{ième}}$ nous calculons donc une forme t-réduite sur $\mathbb{C}((x^{1/kp}))$ et équivalente à M_0, soit M_1 où $t = -k(v_1 - p_1)$, α est choisi alors comme racine de $S_j(M_1)$. Soit M_m une matrice obtenue à une étape de l'algorithme M_m est t_m-réduite sur $\mathbb{C}((x^{1/hp}))$ et $t_m = -h(v_1 - p_m)$ p_m est la pente du PDNA de M_{m-1} à partir de laquelle est construite M_m cette pente est la ${j_m}^{\text{ième}}$ de M_{m-1} nous changeons M_m en $M_m - \alpha_m x^{-p_m - 1}$ où $-\alpha_m$ est racine de $S_{j_m}(M_m)$ puis nous calculons une matrice M_{m+1} t_{m+1}-réduite et équivalente à $M_m - \alpha_m x^{-p_m - 1}$: *cela revient à calculer une matrice t_{m+1}-réduite à partir d'une matrice déjà $t_m - 1$-réduite*, t_{m+1} est l'ordre de réduction à partir duquel apparaît un $m+1^{\text{ième}}$ paramètre de valuation non nul, puis nous calculons le polynôme caractéristique de M_{m+1} ce qui permet d'obtenir les pentes du PDNA de M_{m+1} et, nous le savons, les pentes du PDN de M_{m+1} jusqu'à $v_1 - 1 - t_{m+1}$ (non inclus) etc…

7. En guise de conclusion

Les formes super-irréductibles apparaissent donc comme un outil riche de résultats théoriques et permettent des algorithmes pertinents, cet article est le premier pas d'une théorie des formes super-irréductibles encore à développer et qui doit pouvoir s'appliquer à toute partie de la théorie des opérateurs linéaires ou non-linéaires où le polygone de Newton est sous-jacent citons quelques domaines possibles d'application : résolution des valeurs propres de $A(x)$ (polygone de Puiseux), valeurs propres d'opérateurs différentiels, systèmes aux diffèrences, systèmes de Pfaff etc...

Références

[1] B. Malgrange, *Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularité irrègulière*, Preprint, Institut Fourier Grenoble, 1981.

[2] K. Adjamagbo, *Sur l'effectivité du lemme du vecteur cyclique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. *306* (1988), 543–546.

[3] A. Hilali, *Contribution à l'étude des points singuliers des systèmes différentiels linéaires*, Thèse de 3ième cycle, IMAG, Grenoble, 1982.

[4] A. Hilali, *Solutions formelles de systèmes différentiels linéaires au voisinage d'un point singulier*, Thèse d'état, IMAG, Grenoble, 1987.

[5] A. Hilali and A. Wazner, *Formes super-irréductibles des systèmes différentiels linéaires*, Numer. Math. *50* (1987), 429–449.

[6] M. A. Barkatou, *An algorithm to compute the exponential part of a formal fundamental matrix solution of a linear differential system*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. *8* (1997), 7–58.

[7] J. Moser, *The order of singularity in Fuch's theory*, Math. Z. *72* (1960), 379–398.

[8] A. Hilali and A. Wazner, *Un algorithme de calcul de l'invariant de Katz d'un système différentiel linéaire*, Annales Institut Fourier *36* 3 (1986), 67–81.

[9] N. Katz, *Nilpotent connexions and the monodromy theorem*, Publications Math. IHES n *39* (1970), 176–232.

[10] A. Wazner, *Formes canoniques invariantes d'un système différentiel linéaire différentiel homogène, polygone de Newton, calcul de la partie exponentielle des solutions formelles*, Thèse de l'Université J. Fourier Grenoble, 1998.

[11] F. R. Gantmacher, *Theory of matrices*, Vol II, Chelsea Publishing Co., New York, 1966.

A. Wazner
14, Rue Erckmann-Chatrian
F–68000 Colmar
France
e-mail: awazner@aol.com

Manuscript received: November 30, 2000 and, in final form, January 2, 2002.