En utilisant ZFC on peut montrer que $2\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z} = \{0\}$ et $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \{0\}$.

Alain Wazner

- Avez vous une inclination à penser qu'il y a moins de sons que d'instruments?
- Les éclairs peuvent être aveuglants mais je préfère qu'ils le ne soient pas.
- Vous croyez donc qu'ils ne le sont pas?

Dans tout le texte $(\mathbb{K}, +, \times, \leq)$ sera un corps totalement ordonné et possédant la propriété de la borne supérieure. On munira $(\mathbb{K}, +, \times, \leq)$ de la topologie séparée définie par la métrique (à valeur sur $\mathbb{K}$) $d(x, y) = |x - y| = x - y$ si $y \leq x$, $y - x$ sinon. Pour cette topologie les voisinages de $c \in \mathbb{K}$ sont les ensembles contenant les intervalles $I_{a,b} =]a, b[$ avec $]a, b[= \{x \in \mathbb{K}/a \leq x \leq b\} \backslash \{a, b\}$ avec $a \neq b$ et $c \in I_{a,b}$.
Pour cette topologie :

- $\mathbb{K}$ est complet.
- Toute fonction continue de $\mathbb{K}$ vers $\mathbb{K}$ vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.
- $\mathbb{K}$ est archimédien.

Preuve : consulter les classiques.

Les sous-groupes de $\mathbb{K}$.

Tout $a \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ est d'ordre 0 (soit $< a >$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}$ n'est pas fini) : comme a et $-a$ sont deux éléments non-nuls de signes opposés et $< a >=< -a >$, on peut supposer $a > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ alors $n.a = \underbrace{a + \cdots + a}_{n} > 0$ et en particulier $n.a \neq 0$: a est d'ordre 0.
On pose alors $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \overset{déf}{=} < 1 >$, c'est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$, le plus petit sous-corps de $\mathbb{K}$ contenant $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ est

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{K}} = \left\{ \left(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{q} \right)^{-1} \left(\underbrace{\pm 1 \pm \cdots \pm 1}_{p} \right) / (p, q) \in \mathbb{N} \right\}$$

il est isomorphe à $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ est le corps premier de $\mathbb{K}$ qui a alors une structure de $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$-algèbre.
On peut de plus déduire de la propriété de la borne supérieure la classification suivante : tout sous-groupe additif de $\mathbb{K}$ est :

- soit $a\mathbb{Z} =< a >$ avec $a \in \mathbb{K}$.
- Soit dense dans $\mathbb{K}$.

Consulter les classiques («sous-groupes additifs») pour une preuve.

Sur la topologie des sous-groupes de $\mathbb{K}$.

$\mathbb{K}$ étant muni d'une topologie qui le rend complet c'est alors un espace vectoriel de dimension 1 et nous pouvons être tentés d'utiliser des théorèmes d'analyse propres aux espaces vectoriels complets comme le théorème de Baire. Nous n'en utiliserons qu'une version restreinte s'appliquant à un nombre fini d'ouverts et fondée par le lemme des deux ouverts dont l'énoncé suit.
Si $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont deux ouverts denses de $\mathbb{K}$ alors $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ est un ouvert dense de $\mathbb{K}$.

Preuve : soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{K}$ alors, comme $\mathcal{O}_1$ est un ouvert dense de $\mathbb{K}$, l'ouvert $I \cap \mathcal{O}_1$ contient un intervalle $I \cap \mathcal{O}_1 \supset I_1$, mais $\mathcal{O}_2$ est un ouvert dense de $\mathbb{K}$ et par le même raisonnement l'ouvert $I_1 \cap \mathcal{O}_2$ contient un intervalle $I_1 \cap \mathcal{O}_2 \supset I_2$. Tout intervalle I contient un intervalle I_2 inclus dans $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ qui est un ouvert dense de $\mathbb{K}$.

Nous pouvons en déduire que

Tout sous-groupe propre de $\mathbb{K}$ n'est pas ouvert : soit G un sous-groupe propre de $\mathbb{K}$ qui est un $a\mathbb{Z}$ alors il n'est pas ouvert. Si G est dense dans $\mathbb{K}$ alors supposons le ouvert : en se donnant un élément x de $\mathbb{K}$, son translaté $x+G$ est encore un ouvert dense dans $\mathbb{K}$ et en se donnant un autre élément y de $\mathbb{K}$: l'intersection $(y+G)\cap(x+G)$ est un ouvert dense de $\mathbb{K}$ par le lemme des deux ouverts. En particulier cette intersection n'est pas vide. Ceci prouve que le groupe quotient $\mathbb{K}/G$ ne contient qu'un élément qui ne peut-être que son neutre et donc que $G = \mathbb{K}$ n'est pas un sous-groupe propre de $\mathbb{K}$ (en effet les éléments de $\mathbb{K}/G$ sont les classes $x+G$ qui forment une partition de $\mathbb{K}$).

Quelques éléments de théorie des groupes.

Un théorème de structure de la théorie des groupes.

Soit G un groupe, H et N deux sous-groupes normaux de G, écrire que $G/H \simeq N$ c'est écrire qu'il existe un morphisme de groupe Ψ, tel que $Ker(\Psi) = H$ et $N = Im(\Psi)$, nous cherchons ici à comparer G et H et le principal résultat sera que ces deux groupes sont emboîtés ou d'intersection le groupe nul.
Lemme : soit G un groupe et H, N deux sous-groupes normaux de G, alors

$$(N \simeq G/H) \ \Rightarrow \ (H \subset N) \vee (N \cap H = \{e\})$$

Preuve : puisque G/H est isomorphe à N, il existe un morphisme $\Psi : G \to N$ de noyau H, le dit premier théorème d'isomorphisme de la théorie des groupes conclut à l'existence d'un isomorphisme $\overline{\Psi} : \begin{cases} G/H & \to & N \\ gH & \mapsto & \overline{\Psi}(gH) \end{cases}$ avec $\overline{\Psi}(gH) \overset{déf}{=} \Psi(g)$.
Si F est un sous-groupe distingué de G alors on a bien défini une action de groupe de G sur G/F par $h.gF \overset{déf}{=} hgF$ $(\forall h, g \in G)$ puisque si e est le neutre de G alors

$$e.gF = egF = gF$$

$$k.h.gF = k.hgF = khgF = (kh).gF$$

$\forall s \in G$, *$\omega(sF)$ l'orbite de sF est G/F :* Puisque $\omega(sF) = \{g.sF/g \in G\} = \{gsF/g \in G\}$ soit $\{g'F/g' \in G\} = G/F$ (où on a posé $g' = gs$).
G_{sF} le fixateur de sF est F :
G_{sF} est l'ensemble $\{g \in G/g.sF = sF\}$, lequel est $\{g \in G/gsF = sF\}$. Si $gsF = sF$ alors $gse = gs \in gsF = sF$ donc

$\exists f \in F,\ gs = sf$ et $g = sfs^{-1} \in F$ puisque F est un sous-groupe distingué de G.
Réciproquement si $g \in F$ alors

$$g.sF = gsF = gFs = Fs = sF$$

puisque F est un sous-groupe distingué de G et $gF = F,\ \forall g \in F$.
La bijection $\begin{cases} G/G_{sF} & \to & \omega(sF) \\ gG_{sF} & \mapsto & g.sF \end{cases}$ est le morphisme identique de G/F.

N et H étant des sous-groupes normaux de G : en faisant agir G à gauche sur G/N et G/H comme précédemment on a $\forall s \in G,\ G_{sN} = N$ et $G_{sH} = H$, $\omega(sH) = G/H$ et $\omega(sN) = sN$, les identiques sur G/H et G/N sont les bijections $\begin{cases} G/G_{sH} & \to & \omega(sH) \\ gG_{sH} & \mapsto & g.sH \end{cases}$ et $\begin{cases} G/G_{sN} & \to & \omega(sN) \\ gG_{sN} & \mapsto & g.sN \end{cases}$

On définit une deuxième action de G sur G/H en posant

$$(\forall g, s \in G)\ g.sH = \Psi(g)\overline{\Psi}^{-1} \circ \Psi(s)\ (= \Psi(g)sH)$$

puisque si e est le neutre de G alors $e.sH = \overline{\Psi}^{-1} \circ \Psi(s) = sH$ et puisque $(\forall u, t, s \in G)$

$$\begin{aligned} u.(t.sH) &= u.\left(\Psi(t)\overline{\Psi}^{-1} \circ \Psi(s)\right) = u.\left(\Psi(t)sH\right) \\ &= \Psi(u)\Psi \circ \overline{\Psi}^{-1}\left(\Psi(t)sH\right) \\ &= \Psi(u)\Psi(t)\left(\Psi \circ \overline{\Psi}^{-1}(sH)\right) \\ &= \Psi(ut)\left(\Psi \circ \overline{\Psi}^{-1}(sH)\right) = (ut).sH \end{aligned}$$

$\forall s \in G$, *$\omega(sH)$ l'orbite de sH est sNH* car $\omega(sH) = \{\Psi(g)sH / g \in G\}$ et comme g parcourant G,

$\Psi(g)$ parcourt N... on obtient $\omega(sH) = NsH = sNH$ puisque $sN = Ns$ $(\forall s \in G)$.
Soit $g \in G$ tel que $g.sH = sH$ alors $\Psi(g)sH = sH$. L'élément $\Psi(g)s = \Psi\ g\ e$ appartient à $\Psi(g)sH$, donc à sH : il existe donc $h \in H$ tel que $\Psi(g)s = sh$. On a alors $\Psi(g) = shs^{-1} \in H$ puisque H est distingué dans G. Si $\Psi(g) \in H$ alors

$$\Psi(g)sH = \Psi(g)Hs = Hs = sH$$

G_{sH} le fixateur de sH est donc $\{g \in G/\Psi(g) \in H\}$ soit le sous-groupe de G/H : $\overline{\Psi}^{-1}(H)$.

- L'image par l'isomorphisme $\overline{\Psi}$ du groupe $\overline{\Psi}^{-1}(H)$ -c'est à dire le groupe $\Psi\left(\overline{\Psi}^{-1}(H)\right)$- est, par définition de Ψ et $\overline{\Psi}$, à valeur sur H et incluse dans N : on a donc
$$\Psi\left(\overline{\Psi}^{-1}(H)\right) \subset H \cap N$$
.
- Puisque $N = Im\,(\Psi)$ tout élément de $H \cap N$ est image par Ψ d'un élément de $\overline{\Psi}^{-1}(H)$: on a donc $H \cap N \subset \Psi\left(\overline{\Psi}^{-1}(H)\right)$, et de ce qui précède
$$\Psi\left(\overline{\Psi}^{-1}(H)\right) = H \cap N$$
.

On a alors l'alternative :

- $H \cap N = \{e\}$: dans ce cas $G = NH$ provient de que G/H et N sont isomorphes. Ψ envoie alors N sur N et a pour noyau H, c'est le pendant non-commutatif d'un projecteur sur N de direction H.

- $H \cap N \neq \{e\}$ alors comme $\overline{\Psi}$ est à image sur N, $\overline{\Psi}^{-1}(H) = \overline{\Psi}^{-1}(H \cap N)$ et en composant avec $\overline{\Psi}$ on obtient $H = H \cap N$ soit $H \subset N$.

Pour l'alternative $H \subset N$, on définit bien un morphisme par $\Theta \ : \begin{cases} G/H \to G/N \\ gH \mapsto gN \end{cases}$ puisque si $g_1H = g_2H$ alors $g_2^{-1}g_1 \in N \supset H$ et donc $g_1N = g_2N$.
Si kH est un élément du noyau de Θ alors $\forall g \in G$:

$$\begin{aligned} \Theta(kHgH) &= \Theta(kH).\Theta(gH) \\ &= \Theta(gH).\Theta(kH) \\ &= \Theta(gHkH) = gN \end{aligned}$$

soit $\forall g \in G,\ kgN = gkN = gN$ soit $k \in N$ puisque N est distingué dans G.
Si à présent $k \in N$ alors $\Theta(kH) = kN = N$. *Ceci prouve que* $Ker(\Theta) = N/H$. En utilisant le premier théorème d'isomorphisme de la théorie des groupes, on a le
Paradoxe du reste constant : soit G un groupe et H, N deux sous-groupes normaux dans G tels que $H \cap N \neq \{0\}$, alors

$$(N \simeq G/H) \ \Rightarrow \ N \supset H \text{ et } G/N \simeq (G/H)/(N/H)$$

autrement exprimé si G un groupe et H, N deux sous-groupes normaux dans G tels que $N \simeq G/H$ alors G, M, N vérifient le dit troisième d'isomorphisme de la théorie des groupes avec $G \supset N \supset H$!

Remarquons que l'isomorphisme de classes

$$\overline{\Theta} \ : \begin{cases} (G/H)/(N/H) \to G/N \\ gH.(N.H) \mapsto gN \end{cases}$$

est l'isomorphisme $\overline{\Theta} \ : \begin{cases} (G/H)/(N/H) \to G/N \\ gH.(N/H) \mapsto gN \end{cases}$ mais n'est pas l'identité de G/N puisque

$(N/H) = \{nH/n \in N\}$ n'est pas le groupe N bien que $gH.(N/H) = gN$: en effet l'opération de groupe sur N est $n + n' = n''$ tandis que l'opération de groupe sur N/H est $nH + n'H = n''H$. Il faut donc distinguer gN comme classe de G/N de gN comme classe de $(G/H)/(N/H)$!

L'exemple des groupes additifs de nombres réels.

Nous remarquons que si $h \in \mathbb{R}^*$ le groupe additif engendré par h est celui des sommes finies $h + \cdots + h$ ou $-h - \cdots - h$ auquel on ajoute 0, soit l'ensemble $\{nh/n \in \mathbb{Z}\}$, ce groupe est noté $n\mathbb{Z}$.

Théorème : Soit G_1, G_2 deux sous-groupes de nombres réels alors $G_1 \cap G_2 = \{0\}$.

Preuve : On suppose $G_1 \cap G_2 \neq \{0\}$, nous appelons h un élément non nul de $G_1 \cap G_2$ et considérons le groupe $(G_1 \cap G_2)/h\mathbb{Z}$, puis allons considérer dans un premier temps le cas où $(G_1 \cap G_2)/h\mathbb{Z}$ est isomorphe à un sous-groupe $G \subset \mathbb{R}$ et dans un deuxième temps le cas où il n'est pas isomorphe à un tel groupe.

Premier cas : il existe un groupe $G \subset \mathbb{R}$ tel que $(G_1 \cap G_2)/h\mathbb{Z} \simeq G$ alors suivant le lemme du reste constant $h\mathbb{Z} \subset G$ nous appelons Ψ l'isomorphisme tel que $\Psi\left((G_1 \cap G_2)/h\mathbb{Z}\right) = G$ alors $\Psi(nh) = n\Psi(h) = 0$ soit $\Psi(h) = 0$ soit $h = 0$ ce qui est contradictoire.

Deuxième cas : il n'existe pas de sous-groupe de $\mathbb{R}$ isomorphe à $(G_1 \cap G_2)/h\mathbb{Z}$. Puisque $h \in G_1 \cap G_2$, $G_1 \cap G_2$

est soit $h'\mathbb{Z}$ soit dense dans $\mathbb{R}$, il ne peut être le groupe $h'\mathbb{Z}$ car alors $(G_1 \cap G_2)/h\mathbb{Z}$ serait le groupe $h'\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ qui comprend la classe nulle ce qui entraîne la rationalité du rapport h'/h puis que $h'\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ serait isomorphe à un $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha = rh$ où $r \in \mathbb{Q}$ par **l'axiome du choix dénombrable**, $G_1 \cap G_2$ est alors dense dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $\epsilon > 0$ on peut choisir une suite $g_{n,\epsilon}$ positive décroissante vers 0 d'éléments $g_{n,\epsilon} \in G_1 \cap G_2$ vérifiant $g_{n,\epsilon} < \epsilon$. Choisissons $n \in \mathbb{N}$ et considérons le groupe $\mathbb{Z} + (h - g_{n,\epsilon})\mathbb{Z}$, il est dense dans $\mathbb{R}$ ou égal à un $\alpha\mathbb{Z}$. Supposons qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que

$$\mathbb{Z} + (h - g_{n,\epsilon})\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$$

alors $\exists q \in \mathbb{Z}^*$ tel que $1 + q(h - g_{n,\epsilon}) = \alpha$, il suit $h - g_{n,\epsilon} = (\alpha - 1)/q$ ce qui entraîne $(\alpha - 1) < \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$ et donc $\alpha = 1$ on a alors $\mathbb{Z} + (h - g_{n,\epsilon})\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ soit $(h - g_{n,\epsilon})\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ isomorphe à $\mathbb{Z}$ ce qui est contradictoire. On pose $\mathbb{Z} + (h - g_{n,\epsilon})\mathbb{Z} = G_3$ il vient l'égalité $(h - g_{n,\epsilon})\mathbb{Z} = G_3 + \mathbb{Z}$ mais $G_3 + \mathbb{Z}$ dense dans $\mathbb{R}$ ne peut-être égal à $(h - g_{n,\epsilon})\mathbb{Z}$. Ce théorème contredit la chaîne d'inclusions $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.