

En utilisant ZFACDénombrable on peut montrer  
que  $2\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z} = \{0\}$  et  $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \{0\}$ .

Alain Wazner

- Avez vous une inclination à penser qu'il y a moins de sons que d'instruments?
- Les éclairs peuvent être aveuglants mais je préfère qu'ils le ne soient pas.
- Vous croyez donc qu'ils ne le sont pas?

Dans tout le texte  $(\mathbb{K}, +, \times, \leq)$  sera un corps totalement ordonné et possédant la propriété de la borne supérieure. On munira  $(\mathbb{K}, +, \times, \leq)$  de la topologie séparée définie par la métrique (à valeur sur  $\mathbb{K}$ )  $d(x, y) = |x - y| = x - y$  si  $y \leq x$ ,  $y - x$  sinon. Pour cette topologie les voisinages de  $c \in \mathbb{K}$  sont les ensembles contenant les intervalles  $I_{a,b} = ]a, b[$  avec  $]a, b[ = \{x \in \mathbb{K} / a \leq x \leq b\} \setminus \{a, b\}$  avec  $a \neq b$  et  $c \in I_{a,b}$ . Pour cette topologie :

- $\mathbb{K}$  est complet.
- Toute fonction continue de  $\mathbb{K}$  vers  $\mathbb{K}$  vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.
- $\mathbb{K}$  est archimédien.

*Preuve : consulter les classiques.*

### Les sous-groupes de $\mathbb{K}$ .

Tout  $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  est d'ordre 0 (soit  $\langle a \rangle$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{K}$  n'est pas fini) : comme  $a$  et  $-a$  sont deux éléments non-nuls de signes opposés et  $\langle a \rangle = \langle -a \rangle$ , on peut supposer  $a > 0$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  alors  $n.a = \underbrace{a + \dots + a}_n > 0$  et en particulier  $n.a \neq 0$  :  $a$  est d'ordre 0.

On pose alors  $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \stackrel{\text{déf}}{=} \langle 1 \rangle$ , c'est un groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , le plus petit sous-corps de  $\mathbb{K}$  contenant  $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$  est

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{K}} = \left\{ \left( \underbrace{1 + \dots + 1}_q \right)^{-1} \left( \underbrace{\pm 1 \pm \dots \pm 1}_p \right) / (p, q) \in \mathbb{N} \right\}$$

il est isomorphe à  $\mathbb{Q}$ .

$\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$  est le corps premier de  $\mathbb{K}$  qui a alors une structure de  $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ -algèbre.

On peut de plus déduire de la propriété de la borne supérieure la classification suivante : tout sous-groupe additif de  $\mathbb{K}$  est :

- soit  $a\mathbb{Z} = \langle a \rangle$  avec  $a \in \mathbb{K}$ .
- Soit dense dans  $\mathbb{K}$ .

Consulter les classiques («sous-groupes additifs») pour une preuve.

#### **Sur la topologie des sous-groupes de $\mathbb{K}$ .**

$\mathbb{K}$  étant muni d'une topologie qui le rend complet c'est alors un espace vectoriel de dimension 1 et nous pouvons être tentés d'utiliser des théorèmes d'analyse propres aux espaces vectoriels complets comme le théorème de Baire. Nous n'en utiliserons qu'une version restreinte s'appliquant à un nombre fini d'ouverts et fondée par le lemme des deux ouverts dont l'énoncé suit. Si  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  sont deux ouverts denses de  $\mathbb{K}$  alors  $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$  est un ouvert dense de  $\mathbb{K}$ .

*Preuve :* soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{K}$  alors, comme  $\mathcal{O}_1$  est un ouvert dense de  $\mathbb{K}$ , l'ouvert  $I \cap \mathcal{O}_1$  contient un intervalle  $I \cap \mathcal{O}_1 \supset I_1$ , mais  $\mathcal{O}_2$  est un ouvert dense de  $\mathbb{K}$  et par le même raisonnement l'ouvert  $I_1 \cap \mathcal{O}_2$  contient un intervalle  $I_1 \cap \mathcal{O}_2 \supset I_2$ . Tout intervalle  $I$  contient un intervalle  $I_2$  inclus dans  $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$  qui est un ouvert dense de  $\mathbb{K}$ .

Nous pouvons en déduire que

Tout sous-groupe propre de  $\mathbb{K}$  n'est pas ouvert : soit  $G$  un sous-groupe propre de  $\mathbb{K}$  qui est un  $a\mathbb{Z}$  alors il n'est pas ouvert. Si  $G$  est dense dans  $\mathbb{K}$  alors supposons le ouvert : en se donnant un élément  $x$  de  $\mathbb{K}$ , son translaté  $x+G$  est encore un ouvert dense dans  $\mathbb{K}$  et en se donnant un autre élément  $y$  de  $\mathbb{K}$  : l'intersection  $(y+G) \cap (x+G)$  est un ouvert dense de  $\mathbb{K}$  par le lemme des deux ouverts. En particulier cette intersection n'est pas vide. Ceci prouve que le groupe quotient  $\mathbb{K}/G$  ne contient qu'un élément qui ne peut-être que son neutre et donc que  $G = \mathbb{K}$  n'est pas un sous-groupe propre de  $\mathbb{K}$  (en effet les éléments de  $\mathbb{K}/G$  sont les classes  $x+G$  qui forment une partition de  $\mathbb{K}$ ).

**Quelques éléments de théorie des groupes.**

**Un théorème de structure de la théorie des groupes.**

Soit  $G$  un groupe,  $H$  et  $N$  deux sous-groupes normaux de  $G$ , écrire que  $G/H \simeq N$  c'est écrire qu'il existe un morphisme de groupe  $\Psi$ , tel que  $\text{Ker}(\Psi) = H$  et  $N = \text{Im}(\Psi)$ , nous cherchons ici à comparer  $G$  et  $H$  et le principal résultat sera que ces deux groupes sont emboîtés ou d'intersection le groupe nul.

*Lemme* : soit  $G$  un groupe et  $H, N$  deux sous-groupes normaux de  $G$ , alors

$$(N \simeq G/H) \Rightarrow (H \subset N) \vee (N \cap H = \{e\})$$

*Preuve* : puisque  $G/H$  est isomorphe à  $N$ , il existe un morphisme  $\Psi : G \rightarrow N$  de noyau  $H$ , le dit premier théorème d'isomorphisme de la théorie des groupes conclut à l'existence d'un isomorphisme

$$\bar{\Psi} : \begin{cases} G/H \rightarrow N \\ gH \mapsto \bar{\Psi}(gH) \end{cases} \text{ avec } \bar{\Psi}(gH) \stackrel{\text{déf}}{=} \Psi(g).$$

Si  $F$  est un sous-groupe distingué de  $G$  alors on a bien défini une action de groupe de  $G$  sur  $G/F$  par  $h.gF \stackrel{\text{déf}}{=} hgF$  ( $\forall h, g \in G$ ) puisque si  $e$  est le neutre de  $G$  alors

$$\begin{aligned} e.gF &= egF = gF \\ k.h.gF &= k.hgF = khgF = (kh).gF \end{aligned}$$

$\forall s \in G$ ,  $\omega(sF)$  l'orbite de  $sF$  est  $G/F$  : Puisque  $\omega(sF) = \{g.sF/g \in G\} = \{gsF/g \in G\}$  soit  $\{g'F/g' \in G\} = G/F$  (où on a posé  $g' = gs$ ).

$G_{sF}$  le fixateur de  $sF$  est  $F$  :

$G_{sF}$  est l'ensemble  $\{g \in G/g.sF = sF\}$ , lequel est  $\{g \in G/g.sF = sF\}$ . Si  $gsF = sF$  alors  $gse = gs \in gsF = sF$  donc

$\exists f \in F$ ,  $gs = sf$  et  $g = sfs^{-1} \in F$  puisque  $F$  est un sous-groupe distingué de  $G$ .

Réciproquement si  $g \in F$  alors

$$g.sF = gsF = gFs = Fs = sF$$

puisque  $F$  est un sous-groupe distingué de  $G$  et  $gF = F$ ,  $\forall g \in F$ .

La bijection  $\begin{cases} G/G_{sF} & \rightarrow \omega(sF) \\ gG_{sF} & \mapsto g.sF \end{cases}$  est le morphisme identique de  $G/F$ .

$N$  et  $H$  étant des sous-groupes normaux de  $G$  : en faisant agir  $G$  à gauche sur  $G/N$  et  $G/H$  comme précédemment on a  $\forall s \in G$ ,  $G_{sN} = N$  et  $G_{sH} = H$ ,  $\omega(sH) = G/H$  et  $\omega(sN) = sN$ , les identiques sur  $G/H$  et  $G/N$  sont les bijections  $\begin{cases} G/G_{sH} & \rightarrow \omega(sH) \\ gG_{sH} & \mapsto g.sH \end{cases}$  et  $\begin{cases} G/G_{sN} & \rightarrow \omega(sN) \\ gG_{sN} & \mapsto g.sN \end{cases}$

On définit une deuxième action de  $G$  sur  $G/H$  en posant

$$(\forall g, s \in G) g.sH = \Psi(g)\overline{\Psi}^{-1} \circ \Psi(s) (= \Psi(g)sH)$$

puisque si  $e$  est le neutre de  $G$  alors  $e.sH = \overline{\Psi}^{-1} \circ \Psi(s) = sH$  et puisque  $(\forall u, t, s \in G)$

$$\begin{aligned} u.(t.sH) &= u. \left( \Psi(t)\overline{\Psi}^{-1} \circ \Psi(s) \right) = u. (\Psi(t)sH) \\ &= \Psi(u)\Psi \circ \overline{\Psi}^{-1} (\Psi(t)sH) \\ &= \Psi(u)\Psi(t) \left( \Psi \circ \overline{\Psi}^{-1} (sH) \right) \\ &= \Psi(ut) \left( \Psi \circ \overline{\Psi}^{-1} (sH) \right) = (ut).sH \end{aligned}$$

$\forall s \in G$ ,  $\omega(sH)$  l'orbite de  $sH$  est  $sNH$  car  $\omega(sH) = \{\Psi(g)sH/g \in G\}$  et comme  $g$  parcourant  $G$ ,

$\Psi(g)$  parcourt  $N \dots$  on obtient  
 $\omega(sH) = NsH = sNH$  puisque  
 $sN = Ns (\forall s \in G)$ .

Soit  $g \in G$  tel que  $g.sH = sH$  alors  
 $\Psi(g)sH = sH$ . L'élément  $\Psi(g)s = \Psi(g)e$  appartient  
à  $\Psi(g)sH$ , donc à  $sH$  : il existe donc  $h \in H$  tel que  
 $\Psi(g)s = sh$ . On a alors  $\Psi(g) = shs^{-1} \in H$  puisque  $H$   
est distingué dans  $G$ . Si  $\Psi(g) \in H$  alors

$$\Psi(g)sH = \Psi(g)Hs = Hs = sH$$

$G_{sH}$  le fixateur de  $sH$  est donc  
 $\{g \in G / \Psi(g) \in H\}$  soit le sous-groupe de  $G/H : \overline{\Psi}^{-1}(H)$ .

- L'image par l'isomorphisme  $\overline{\Psi}$  du groupe  
 $\overline{\Psi}^{-1}(H)$  -c'est à dire le groupe  $\Psi(\overline{\Psi}^{-1}(H))$ - est, par  
définition de  $\Psi$  et  $\overline{\Psi}$ , à valeur sur  $H$  et incluse dans  
 $N$  : on a donc

$$\Psi(\overline{\Psi}^{-1}(H)) \subset H \cap N$$

- Puisque  $N = \text{Im}(\Psi)$  tout élément de  $H \cap N$  est  
image par  $\Psi$  d'un élément de  $\overline{\Psi}^{-1}(H)$  : on a donc  
 $H \cap N \subset \Psi(\overline{\Psi}^{-1}(H))$ , et de ce qui précède

$$\Psi(\overline{\Psi}^{-1}(H)) = H \cap N$$

On a alors l'alternative :

- $H \cap N = \{e\}$  : dans ce cas  $G = NH$  provient de que  
 $G/H$  et  $N$  sont isomorphes.  $\Psi$  envoie alors  $N$  sur  $N$   
et a pour noyau  $H$ , c'est le pendant non-commutatif  
d'un projecteur sur  $N$  de direction  $H$ .

- $H \cap N \neq \{e\}$  alors comme  $\overline{\Psi}$  est à image sur  $N$ ,  $\overline{\Psi}^{-1}(H) = \overline{\Psi}^{-1}(H \cap N)$  et en composant avec  $\overline{\Psi}$  on obtient  $H = H \cap N$  soit  $H \subset N$ .

Pour l'alternative  $H \subset N$ , on définit bien un morphisme par  $\Theta : \begin{cases} G/H \rightarrow G/N \\ gH \mapsto gN \end{cases}$  puisque si  $g_1H = g_2H$  alors  $g_2^{-1}g_1 \in N \supset H$  et donc  $g_1N = g_2N$ .

Si  $kH$  est un élément du noyau de  $\Theta$  alors  $\forall g \in G :$

$$\begin{aligned} \Theta(kHgH) &= \Theta(kH) \cdot \Theta(gH) \\ &= \Theta(gH) \cdot \Theta(kH) \\ &= \Theta(gHkH) = gN \end{aligned}$$

soit  $\forall g \in G, kgN = gkN = gN$  soit  $k \in N$  puisque  $N$  est distingué dans  $G$ .

Si à présent  $k \in N$  alors  $\Theta(kH) = kN = N$ . Ceci prouve que  $\text{Ker}(\Theta) = N/H$ . En utilisant le premier théorème d'isomorphisme de la théorie des groupes, on a le *Paradoxe du reste constant* : soit  $G$  un groupe et  $H, N$  deux sous-groupes normaux dans  $G$  tels que  $H \cap N \neq \{0\}$ , alors

$$(N \simeq G/H) \Rightarrow N \supset H \text{ et } G/N \simeq (G/H)/(N/H)$$

autrement exprimé si  $G$  un groupe et  $H, N$  deux sous-groupes normaux dans  $G$  tels que  $N \simeq G/H$  alors  $G, M, N$  vérifient le dit troisième d'isomorphisme de la théorie des groupes avec  $G \supset N \supset H$ !

Remarquons que l'isomorphisme de classes

$$\overline{\Theta} : \begin{cases} (G/H)/(N/H) \rightarrow G/N \\ gH \cdot (N/H) \mapsto gN \end{cases}$$

est l'isomorphisme  $\overline{\Theta} : \begin{cases} (G/H)/(N/H) \rightarrow G/N \\ gH \cdot (N/H) \mapsto gN \end{cases}$  mais n'est pas l'identité de  $G/N$  puisque



$(N/H) = \{nH/n \in N\}$  n'est pas le groupe  $N$  bien que  
 $gH.(N/H) = gN$  : en effet  
 l'opération de groupe sur  $N$  est  $n + n' = n''$  tandis que  
 l'opération de groupe sur  $N/H$  est  
 $nH + n'H = n''H$ . Il faut donc distinguer  $gN$  comme  
 classe de  $G/N$  de  $gN$  comme classe de  $(G/H)/(N/H)$ !

### L'exemple des groupes additifs de nombres réels.

Nous remarquons que si  $h \in \mathbb{R}^*$  le groupe additif engendré par  $h$  est des finies  $h + \dots + h$  ou  $-h - \dots - h$  auquel on ajoute 0, soit l'ensemble  $\{nh/n \in \mathbb{Z}\}$ , ce groupe est noté  $n\mathbb{Z}$ .

**Théorème :** Soit  $G_1, G_2$  deux sous-groupes de nombres réels alors  $G_1 \cap G_2 = \{0\}$ .

**Preuve :** On suppose  $G_1 \cap G_2 \neq \{0\}$ , nous appelons  $h$  un élément non nul de  $G_1 \cap G_2$  et considérons le groupe  $(G_1 \cap G_2)/h\mathbb{Z}$ , puis allons considérer dans un premier temps le cas où  $(G_1 \cap G_2)/h\mathbb{Z}$  est isomorphe à un sous-groupe  $G \subset \mathbb{R}$  et dans un deuxième temps le cas où il n'est pas isomorphe à un tel groupe.

**Premier cas :** il existe un groupe  $G \subset \mathbb{R}$  tel que  $(G_1 \cap G_2)/h\mathbb{Z} \simeq G$  alors suivant le lemme du reste constant  $h\mathbb{Z} \subset G$  nous appelons  $\Psi$  l'isomorphisme tel que  $\Psi((G_1 \cap G_2)/h\mathbb{Z}) = G$  alors  $\Psi(nh) = n\Psi(h) = 0$  soit  $\Psi(h) = 0$  soit  $h = 0$  ce qui est contradictoire.

**Deuxième cas :** il n'existe pas de sous-groupe de  $\mathbb{R}$  isomorphe à  $(G_1 \cap G_2)/h\mathbb{Z}$ . Puisque  $h \in G_1 \cap G_2$ ,  $G_1 \cap G_2$

est soit  $h'\mathbb{Z}$  soit dense dans  $\mathbb{R}$ , il ne peut être le groupe  $h'\mathbb{Z}$  car alors  $(G_1 \cap G_2)/h\mathbb{Z}$  serait le groupe  $h'\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$  qui comprend la classe nulle ce qui entraîne la rationalité du rapport  $h'/h$  puis que  $h'\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$  serait isomorphe à un  $\alpha\mathbb{Z}$  avec  $\alpha = rh$  où  $r \in \mathbb{Q}$  par **l'axiome du choix dénombrable**,  $G_1 \cap G_2$  est alors dense dans  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $\epsilon > 0$  on peut choisir une suite  $g_{n,\epsilon}$  positive décroissante vers 0 d'éléments non nuls  $g_{n,\epsilon} \in G_1 \cap G_2$  vérifiant  $0 < g_{n,\epsilon} < \epsilon$  de la façon suivante : on choisit  $g_{0,\epsilon}$  dans  $]0, \epsilon[$ , puis  $g_{n,\epsilon}$  étant donné on choisit  $g_{n+1,\epsilon}$  dans  $]0, g_{n,\epsilon}/2[$ . Par la relation de récurrence  $g_{n+1,\epsilon} < g_{n,\epsilon}/2$  on a  $g_{n,\epsilon} < \epsilon/2^n$  : la suite  $g_{n,\epsilon}$  décroît vers 0, nous n'utilisons pas d'axiome de choix pour construire cette suite. Choisissons  $n \in \mathbb{N}$  et considérons le groupe  $\mathbb{Z} + (h - g_{n,\epsilon})\mathbb{Z}$ , il est dense dans  $\mathbb{R}$  ou égal à un  $\alpha\mathbb{Z}$ . Supposons qu'il existe  $\alpha \geq 0$  tel que

$$\mathbb{Z} + (h - g_{n,\epsilon})\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$$

alors  $\exists q \in \mathbb{Z}^*$  tel que  $1 + q(h - g_{n,\epsilon}) = \alpha$ , il suit  $h - g_{n,\epsilon} = (\alpha - 1)/q$  ce qui entraîne  $(\alpha - 1) < \epsilon$ ,  $\forall \epsilon > 0$  et donc  $\alpha = 1$  on a alors  $\mathbb{Z} + (h - g_{n,\epsilon})\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$  soit  $(h - g_{n,\epsilon})\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$  isomorphe à  $\mathbb{Z}$  ce qui est contradictoire. On pose  $\mathbb{Z} + (h - g_{n,\epsilon})\mathbb{Z} = G_3$  il vient l'égalité  $(h - g_{n,\epsilon})\mathbb{Z} = G_3 + \mathbb{Z}$  mais  $G_3 + \mathbb{Z}$  dense dans  $\mathbb{R}$  ne peut être égal à  $(h - g_{n,\epsilon})\mathbb{Z}$ . Ce théorème contredit la chaîne d'inclusions  $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

## Conclusion

On trouve sur WikipediA un article de Ross Street qui construit le corps ordonné  $(\mathbb{R}, +, \times, \leq$  comme classe de quasi-morphismes sur les entiers relatifs. L'article ([1]) n'utilise pas d'axiome du choix pour l'établir,  $\mathbb{Z}$  étant

constructible par ajout de structure à partir de l'ensemble vide, cet article établit un modèle de ZFACDénombrable inconsistant.

### **Références\***

- [1] The Efficient Real Number (James Douglas, Rony Kirollos, Ben Odgers, Ross Street and Nguyen Hanh Vo) Macquarie University February 2004